ŠIAULIŲ VALSTYBINĖ KOLEGIJA

Ingrida Vaičiulytė

TAIKOMOJI MATEMATIKA

Mokomoji priemonė

ŠIAULIŲ
VALSTYBINĖ
KOLEGIJA

Šiauliai, 2014

Aprobuota Šiaulių valstybinės kolegijos Verslo ir technologijų fakulteto tarybos posėdyje, vykusiame 2014 m. rugsėjo 18 d. (protokolas Nr. VT4-18).

Recenzentai:
prof. dr. Renata Macaitienė (Šiaulių universitetas),
Audronė Rimkevičienė (Šiaulių valstybinė kolegija).

ISBN 978-609-415-086-9

TURINYS

PRATARMĖ

Ši mokomoji priemonė skirta Šiaulių valstybinės kolegijos technologijos bei socialinių mokslų krypčių studentams. Ji parengta pagal kolegijoje vykdomas neuniversitetinių studijų programas. Leidinyje glaustai ir suprantamai išdėstomi aukštosios matematikos pagrindai demonstruojant pritaikymo galimybes įvairiems praktiniams uždaviniams (ekonomikos, gamybos valdymo, planavimo ar kt.) spręsti.

Mokomojoje priemonėje pateikiama medžiaga yra suskaidyta į skyrius. Pradedama nuo finansų matematikos, tada pereinama prie matricų teorijos ir tokiu būdu nustatomi ryšiai tarp tiesinės algebros ir ekonomikos. Toliau supažindinama su funkcijų tyrimo, ribų apskaičiavimo, diferencialinio ir integralinio skaičiavimo temomis bei įvairiais taikymo ekonomikoje ir inžinerijoje pavyzdžiais. Paskutiniame skyriuje apžvelgiamas kompiuterinių programų taikymas matematiniams skaičiavimams atlikti.

Siekiant palengvinti teorinės medžiagos įsisavinimą, tekstas papildomas grafiniais vaizdais. Kiekviename skyriuje yra įvairaus pobūdžio uždavinių, t. y. nuo įprastų iki sudėtingesnių, reikalaujančių loginio mąstymo.

Nuoširdžiai dėkoju recenzentėms prof. dr. Renatai Macaitienei ir lekt. Audronei Rimkevičienei už vertingas pastabas ir patarimus. Taip pat noriu padėkoti Šiaulių valstybinei kolegijai, padėjusiai rengti leidinį spaudai.

Autorė

1. FINANSINIAI SKAIČIAVIMAI

Žmogui nepakanka kaupti žinias, reikia mokėti iš jų gauti palūkanas.

J. V. Gėtė

Procentas – viena šimtoji skaičiaus dalis:

$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Promilė – viena tūkstantoji skaičiaus dalis:

$$1\,‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001.$$

Indėlis – į banką padėta pinigų suma. Indėliai būna terminuoti, neterminuoti, kaupiamieji, taupomieji ir kt.

Paskola (kreditas) – paskolinta banko ar asmens pinigų suma. Tas, kuris pinigus skolina, vadinamas kreditoriumi, o tas, kuris ima paskolą – debitoriumi.

Palūkanos – skirtumas tarp paskolintos ir grąžintos sumos.

Palūkanų norma – sutarti metiniai procentai nuo paskolintos sumos. Palūkanos yra paprastosios ir sudėtinės.

Paprastosios palūkanos skaičiuojamos nuo pradinės vertės:

$$FV = PV(1 + i \cdot t), \tag{1}$$

PV – pradinė vertė (angl. *present value*);

FV – sukaupta vertė (angl. *future value*);

i – palūkanų norma;

t – laikotarpis metais.

Sudėtinės palūkanos – palūkanos, apskaičiuojamos kiekvieno periodo pabaigoje nuo periodo pradžioje buvusios vertės:

$$FV = PV(1 + i)^t. \tag{2}$$

Jei palūkanos perskaičiuojamos m kartų per metus, tai

$$FV = PV\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{t \cdot m}. \tag{3}$$

Anuitetas – paskolos atidavimo būdas, pagal kurį nustatytu laikotarpiu atiduodama skola ir palūkanos. Įmokos dydis visą laikotarpį nekinta.

Linijiniu mokėjimo metodu kiekvieną mėnesį grąžinama fiksuota paskolos dalis ir mokama kintanti palūkanų, apskaičiuojamų pagal likusio įsiskolinimo sumą, dalis. Įmokos per visą periodą mažėja.

Pasirinkus linijinį mokėjimo metodą, per visą paskolos laikotarpį sumokama mažiau palūkanų, o anuitetiniu mokėjimo metodu paskolos sutarties pradžioje yra mokamos mažesnės įmokos, palyginti su linijiniu būdu mokamomis įmokomis. Nors anuitetiniu būdu bankui yra sumokama daugiau palūkanų, tačiau šiuo atveju reikėtų įvertinti ir infliaciją.

Diskontavimas yra būsimų pinigų dabartinės vertės nustatymas.

Dabartinės vertės apskaičiavimas	
Mokėjimai atliekami kiekvieno periodo pradžioje	Mokėjimai atliekami kiekvieno periodo pabaigoje
$PV = R\left(1+\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right)$ arba $PV = R\left(1+\frac{r^n-r}{r-1}\right)$, čia $r=\frac{1}{1+i}$	$PV = R\left(\frac{1}{1+i}+\frac{1}{(1+i)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}\right)$ arba $PV = R\frac{r(r^n-1)}{r-1}$, čia $r=\frac{1}{1+i}$

Perskaičiavimas – dabartinių pinigų būsimosios vertės nustatymas.

Būsimosios vertės apskaičiavimas	
Mokėjimai atliekami kiekvieno periodo pradžioje	Mokėjimai atliekami kiekvieno periodo pabaigoje
$FV = R\frac{(1+i)((1+i)^n-1)}{i}$	$FV = R\frac{(1+i)^n-1}{i}$

Kredito grąžinimas.

Tarkime, iš banko paimtas ilgalaikis kreditas, kuris bus grąžinamas anuitetiniu būdu (kas periodą mokamos vienodo dydžio įmokos). Tuomet

$$K = R\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}, \tag{4}$$

čia K – kredito dydis,

R – įmokos dydis,

i – palūkanų norma,

n – periodų skaičius.

Kapitalo kaupimas.

Tarkime, į banką padėjome kaupiamąjį indėlį, t. y. kas periodą jis vis papildomas ta pačia pinigų suma. Tuomet sukaupta suma po n periodų apskaičiuojama taip:

$$K = \left(K_0 + \frac{R}{i}\right)(1+i)^n - \frac{R(1+i)}{i}, \qquad (5)$$

čia K_0 – pradinis indėlis.

Pavyzdžiai.

1. Koks yra 20 ir 80 procentinis santykis?

   Sprendimas.

   $$\frac{20}{80} \cdot 100\,\% = 25\,\%.$$

   Ats.: 25 %.

2. Prekės kaina buvo padidinta 25 %. Kiek procentų reikia ją sumažinti, kad gautume pradinę kainą?

   Sprendimas.

   Tarkime, p – pradinė prekės kaina. Tuomet po padidinimo ji kainuos

   $$p + 0{,}25p = 1{,}25p.$$

   Norėdami gauti pradinę kainą, šią reikia sumažinti x %, t. y.

   $$1{,}25p - 1{,}25p \cdot x = p,$$

   $$1{,}25p \cdot (1-x) = p,$$

   $$1 - x = 0{,}8,$$

   $$x = 0{,}2.$$

   Ats.: 20 %.

3. Į sąskaitą padėta 1200 Lt su 5 % paprastųjų palūkanų norma. Kokia sukaupta suma bus po 15 mėnesių?

   Sprendimas.

   $$S = 1200\left(1 + 0{,}05 \cdot \frac{15}{12}\right) = 1\,275 \text{ (Lt)}.$$

   Ats.: 1 275 Lt.

4. Į kokią sumą išaugs 2000 Lt, jei juos padėsime į banką 4 metams su 3 % palūkanų norma, perskaičiuojama kas du mėnesius?

   Sprendimas.

$$S = 2000\left(1+\frac{0{,}03}{6}\right)^{4\cdot 6} = 2\,254{,}32 \text{ (Lt).}$$

Ats.: 2 254,32 Lt.

5. Iš banko 30 metų paimtas kreditas su 3 % metinių palūkanų. Kas mėnesį reikia grąžinti po 660 Lt. Kokio dydžio kreditas buvo paimtas?

   Sprendimas.

$$K = 660\cdot\frac{(1+0{,}0025)^{30\cdot 12}-1}{0{,}0025\cdot(1+0{,}0025)^{30\cdot 12}} = 156\,545 \text{ (Lt).}$$

Ats.: 156 545 Lt.

6. Bankas moka 12 % metinių palūkanų. Periodo trukmė – vienas mėnuo. Apskaičiuokite indėlio dydį po vienerių metų, jei pradinis indėlis buvo 1000 Lt ir kiekvieną mėnesį papildomai pervedama po 500 Lt.

   Sprendimas.

   Vieno periodo palūkanų norma $i = \frac{0{,}12}{12}$. Taigi

$$K = \left(1000+\frac{500}{0{,}01}\right)(1+0{,}01)^{12} - \frac{500(1+0{,}01)}{0{,}01} = 6\,968{,}08 \text{ (Lt).}$$

Ats.: 6 968,08 Lt.

Uždaviniai

1. Švieži grybai turi 90 % vandens, o džiovinti – 12 %. Kiek gaunama džiovintų grybų iš 22 kg šviežių?
2. Parduotuvės savininkas uždėjo prekei 45 % antkainį, o paskui suteikė pirkėjui 20 % nuolaidą. Kiek procentų pajamų gavo parduotuvės savininkas?
3. Kiek procentų prekės kainą reikia padidinti, o po to tiek pat procentų sumažinti, kad pradinė kaina sumažėtų tik 1 %?
4. Baltijos jūros vandenyje yra 6 ‰ druskų. Kiek druskų yra kibire (10 kg) jūros vandens?
5. Du draugai norėjo kartu pirkti automobilį. Pirmasis galėjo sumokėti 34 %, o antrasis 45 % automobilio kainos. Iš viso jiems trūko 1785 Lt. Kiek kainavo automobilis?
6. Turistai keliavo tris dienas. Pirmąją dieną jie nukeliavo 25 % viso maršruto ilgio. Antrąją dieną – 20 % likusio maršruto, o trečiąją dieną – likusius 200 km. Raskite viso maršruto ilgį. Kiek procentų viso maršruto nukeliavo trečiąją dieną? Kiek kilometrų nukeliavo turistai per pirmąsias dvi dienas?
7. Kiek pinigų reikia įdėti į taupomąją sąskaitą, kad po 7 metų susikauptų 8500 Lt, jei mokama 10 % metinių palūkanų?
8. Į banką, kuris moka 7 % metinių palūkanų ir jas priskaičiuoja kas pusmetį, padėta 2000 Lt. Koks bus indėlis po 10 metų?
9. Banke paimtas 10 000 Lt kreditas su 12 % metinių palūkanų. Kreditą reikia grąžinti per 5 metus, kiekvieno mėnesio gale įmokant po vienodą pinigų sumą. Kokio dydžio bus įmokos?
10. Už dviejų metų nuomą kompanija moka 450 Lt kiekvieno mėnesio pradžioje. Raskite dabartinę įmokų vertę per tuos metus, jei mokama į sąskaitą banke, duodančiame 8 % metinių palūkanų, skaičiuojamų kas mėnesį?
11. Kiekvieno mėnesio pradžioje į sąskaitą banke įnešama po 300 Lt su 5,5 % metinių sudėtinių palūkanų, skaičiuojamų ketvirčiais. Raskite indėlio vertę po metų.
12. Tėvas nusprendė savo sūnui atidaryti sąskaitą banke su 5 % palūkanų norma, priskaičiuojamų kas pusmetį. Jis planuoja 16 metų kiekvieną pusmetį įnešti po 100 Lt. Kiek pinigų bus sąskaitoje po 16 metų?

2. MATRICŲ TEORIJA

2.1. Matricos sąvoka

1. Apibrėžimas.

Matrica vadinama tam tikrų elementų stačiakampė lentelė

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ arba } A = \left(a_{ij}\right), \text{ kai } i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Elementai a_{ij} vadinami matricos elementais, čia pirmasis elemento indeksas i rodo eilutės numerį, o antrasis indeksas j – stulpelio numerį. Taigi matrica A turi m eilučių ir n stulpelių, todėl sakoma, jos matmenys yra $m \times n$.

2. Apibrėžimas.

Matrica, kurios eilučių ir stulpelių skaičius yra vienodas, t. y. $m = n$, vadinama ***kvadratine matrica***

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

čia elementai $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ sudaro pagrindinę įstrižainę (diagonalę),

o elementai $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$ sudaro šalutinę įstrižainę.

3. Apibrėžimas.

Matrica, kurios visi elementai lygūs nuliui, vadinama ***nuline matrica***

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Apibrėžimas.

Kvadratinė matrica, kurios pagrindinę įstrižainę sudaro vienetai, o visi kiti elementai yra nuliai, vadinama ***vienetine***

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Vienetinės matricos bendresnis atvejis yra ***diagonalinė matrica***

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}.$$

5. Apibrėžimas.

Matricos A eilutes sukeitus su stulpeliais vietomis gaunama ***transponuotoji matrica***

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pavyzdys.

Matricos $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ transponuota yra $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Apibrėžimas.

Dvi vienodo formato matricos $A = (a_{ij})$ ir $B = (b_{ij})$ vadinamos ***lygiomis***, kai jų atitinkami elementai sutampa, t. y. $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

2.2. Veiksmai su matricomis

1. Taisyklė (daugyba iš skaičiaus).

Norint padauginti matricą A iš skaičiaus k, reikia kiekvieną jos elementą dauginti iš to skaičiaus

$$k\cdot A = k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & \cdots & k\cdot a_{1n} \\ k\cdot a_{21} & k\cdot a_{22} & \cdots & k\cdot a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k\cdot a_{m1} & k\cdot a_{m2} & \cdots & k\cdot a_{mn}\end{pmatrix}.$$

2. Taisyklė (sudėtis ir atimtis).

Norint matricas sudėti (atimti), reikia sudėti (atimti) atitinkamus jų elementus

$$A\pm B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn}\end{pmatrix}.$$

PASTABA. Sudėti ir atimti galima tik vienodų matmenų matricas.

3. Taisyklė (matricų daugyba).

Norint matricas sudauginti, reikia matricos $A=(a_{ij})$ eilučių atitinkamus elementus dauginti iš matricos $B=(b_{ij})$ stulpelio atitinkamų elementų ir juos sudėti, t. y.

$$(a_{ij})\cdot(b_{ij}) = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{1k}\cdot b_{kj},$$

čia matricos A matmuo $m\times k$, o matricos B – $k\times n$.

PASTABA.

Norint matricą A padauginti iš matricos B, šių matricų pora (A,B) turi būti ***suderinta***. Tai reiškia, kad matricos A stulpelių skaičius turi būti lygus matricos B eilučių skaičiui. Iš to išplaukia, kad

$$A\cdot B \neq B\cdot A.$$

Pavyzdžiai.

Su matricomis $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0\end{pmatrix}$ ir $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ atliksime tokius veiksmus:

1) $2A$;

2) $A+B^T$;

3) $A - B$;

4) $A \cdot B$.

Sprendimas.

1) $2A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & -6 \\ 4 & -2 & 2 \\ 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A + B^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

4) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + (-3) \cdot 2 & 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 & 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 \\ 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \\ 5 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 5 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -13 & -11 \\ 0 & 4 & 9 \\ -5 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

2.3. Determinantas

1. Apibrėžimas.

Determinantu vadinamas skaičius, kuris pagal tam tikrą taisyklę priskiriamas kvadratinei matricai

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Determinantas žymimas graikiška raide *delta* Δ arba $\det(A)$, $|A|$.

Pirmos eilės kvadratinės matricos determinantas yra skaičius

$$|a_{11}| = a_{11}.$$

Antros eilės kvadratinės matricos determinantas apskaičiuojamas taip:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Trečios eilės determinantą galima apskaičiuoti naudojant ***trikampių taisyklę***

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Schemoje parodyta, kad trikampiais sujungti elementai turi būti sudauginami.

Taip pat trečios eilės determinantą patogu apskaičiuoti prirašant du stulpelius (arba dvi eilutes).

Toks skaičiavimo metodas vadinamas ***Sariuso schema***:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{|ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

arba

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c|ccc|c} + & a_{11} & a_{12} & a_{13} & - \\ + & a_{21} & a_{22} & a_{23} & - \\ + & a_{31} & a_{32} & a_{33} & - \\ \hline & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ & a_{21} & a_{21} & a_{23} & \end{array} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21}.$$

Tarkime, turime n-tos eilės kvadratinę matricą.

2. Apibrėžimas.

Kvadratinės matricos A elemento a_{ij} ***minoru*** M_{ij} vadinamas determinantas, gautas išbraukus matricos i-ąją eilutę ir j-jį stulpelį, $i = 1, 2, \ldots, n,\quad j = 1, 2, \ldots, n.$

3. Apibrėžimas.

Kvadratinės matricos A elemento a_{ij} ***adjunktu*** vadinamas skaičius A_{ij}, apskaičiuojamas

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

DETERMINANTO SKAIČIAVIMO TAISYKLĖ.

Matricos A determinantas yra lygus bet kurios eilutės (stulpelio) elementų ir jų adjunktų sandaugų sumai.

Pavyzdžiai.

1. $|A| = |-7| = -7;$

2. $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2;$

3. $|C| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{matrix} =$

$= (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 4 - 0 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) \cdot 4 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 =$

$= 1 + 0 + 12 - 0 - 8 + 6 = 11;$

4. $|D| = \begin{vmatrix} -4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 5 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = -4 \cdot A_{11} + 5 \cdot A_{31},$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} -4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 16 + 36 - 6 - 12 + 8 = 41,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 10 - 8 + 0 + 1 - 60 - 0 = -57,$$

$|D| = -4 \cdot A_{11} + 5 \cdot A_{31} = -4 \cdot 41 + 5 \cdot (-57) = -164 - 285 = -449.$

2.4. Atvirkštinė matrica

Apibrėžimas.

Atvirkštinė matrica A^{-1} – tai tokia matrica, kurią padauginus iš matricos A gaunama vienetinė matrica E

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Matricos A atvirkštinė matrica apskaičiuojama pagal formulę

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

čia A_{ij} – matricos A adjunktai, $i = 1, 2, \ldots, n,\ \ j = 1, 2, \ldots, n.$

PASTABA.

Atvirkštinę matricą turi tik kvadratinės matricos, kurių determinantas nelygus nuliui. Tokios matricos vadinamos ***reguliariosiomis***. Matrica, kurios determinantas lygus nuliui, vadinama ***išsigimusiąja***. Tokia matrica neturi atvirkštinės.

Pavyzdys.

Rasime matricos $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ atvirkštinę matricą.

<u>Sprendimas.</u>

Užrašome trečios eilės atvirkštinės matricos formulę:

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuojame duotos matricos determinantą:

$$|M| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 + 8 - 9 - 6 + 6 - 0 = -1.$$

Apskaičiuojame visus matricos M adjunktus:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(2 - (-3)) = -5,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 - (-8)) = -2, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6 - (-12) = 6.$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 = 3, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3 - (-4)) = -7,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 - (-9)) = -3,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-3) = 3.$$

Tuomet užrašome atvirkštinę matricą:

$$M^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -2 & 6 & -3 \\ 3 & -7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & 3 \\ -3 & 7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Patikrinimas:

$$M \cdot M^{-1} = E,$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 & -2 \\ 2 & -6 & 3 \\ -3 & 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-2+9 & 15+6-21 & -6-3+9 \\ -6+0+6 & 15+0-14 & -6+0+6 \\ -8+2+6 & 20-6-14 & -8+3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uždaviniai

1. Su matricomis $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ir $B = \begin{pmatrix} 8 & 10 & -6 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ atlikite tokius veiksmus:

   a) $3A$;

   b) $A + B$;

   c) $A - B$;

   d) $\frac{1}{2}B - 3A$.

2. Apskaičiuokite $A + 2B^T$, kai $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ir $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Apskaičiuokite matricų sandaugą:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

   b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

   c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

   d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

4. Duotos matricos $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ir $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Apskaičiuokite:

   a) $(A - B) \cdot C^T$;

   b) $A^2 - 2B$.

5. Raskite matricos $M = A \cdot B$ elementų a_{23} ir a_{31} sumą, kai $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

6. Išspręskite lygtis:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 3 & 15 - x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$.

7. Apskaičiuokite determinantus:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 \\ 15 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$;

f) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Raskite matricos $M = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ adjunktą A_{23}.

9. Sudarykite matricą, atvirkštinę duotajai:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$;

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

3. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS

1. Apibrėžimas.

m tiesinių lygčių su *n* nežinomųjų sistema yra

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \; + \; a_{12}x_2 \; + \ldots + \; a_{1n}x_n \; = \; b_1, \\ a_{21}x_1 \; + \; a_{22}x_2 \; + \ldots + \; a_{2n}x_n \; = \; b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 \; + \; a_{m2}x_2 \; + \ldots + \; a_{mn}x_n \; = \; b_m, \end{cases} \tag{1}$$

čia a_{ij} – sistemos koeficientai,

b_i – sistemos laisvieji nariai, $i = 1, 2, \ldots, m,$

x_j – sistemos nežinomieji (kintamieji), $j = 1, 2, \ldots, n.$

Tiesinių lygčių sistemos sprendiniu vadinamas toks nežinomųjų reikšmių rinkinys $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n),$ kuris tinka kiekvienai (1)-os sistemos lygčiai.

2. Apibrėžimas.

Sistema, kuri turi sprendinių, vadinama ***suderinta***, kuri neturi sprendinių – ***nesuderinta***.

3. Apibrėžimas.

Sistema, kuri turi vienintelį sprendinį, vadinama ***apibrėžtąja***, kuri turi be galo daug sprendinių – ***neapibrėžtąja***.

4. Apibrėžimas.

Nežinomieji, kurių reikšmes galima laisvai parinkti, vadinami ***laisvaisiais nežinomaisiais***, kiti – ***baziniais nežinomaisiais***.

Tiesinių lygčių sistemoms spręsti naudojami šie metodai:

1. Kramerio metodas;
2. Atvirkštinės matricos metodas;
3. Gauso metodas;
4. Gauso ir Žordano metodas.

3.1. Kramerio metodas

Tarkime, turime kvadratinę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \; + \; a_{12}x_2 \; + \ldots + \; a_{1n}x_n \; = \; b_1, \\ a_{21}x_1 \; + \; a_{22}x_2 \; + \ldots + \; a_{2n}x_n \; = \; b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 \; + \; a_{n2}x_2 \; + \ldots + \; a_{nn}x_n \; = \; b_n. \end{cases} \tag{2}$$

Sudarome jos koeficientų matricą A ir laisvųjų narių stulpelį B:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuojame matricos A determinantą:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Jei $\Delta \neq 0,$ tai šio determinanto stulpelius paeiliui keičiame sistemos laisvųjų narių stulpeliu B ir skaičiuojame tokius determinantus:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \dots, \ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

TEOREMA.

Skaičių rinkinys $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right),$ $\Delta \neq 0,$ yra kvadratinės tiesinių lygčių sistemos (2) sprendinys. Komponenčių x_i skaičiavimo formulės

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

vadinamos ***Kramerio formulėmis***.

PASTABA.

1) Jei $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0,$ tuomet sistema (2) turi be galo daug sprendinių ir yra neapibrėžtoji.
2) Jei $\Delta = 0,$ o $\Delta_1 \neq 0,$ $\Delta_2 \neq 0,$ ..., $\Delta_n \neq 0,$ tuomet sistema (2) neturi sprendinių ir yra nesuderinta.

Pavyzdžiai.

1. $\begin{cases} x - y = 1, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$

Sprendimas.

Užrašome sistemos koeficientų matricą ir laisvųjų narių stulpelį:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuojame determinantus:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 = 3 + 2 = 5,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 7 = 3 + 7 = 10,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 1 \cdot 2 = 7 - 2 = 5.$$

Sprendiniui gauti pritaikome Kramerio formules:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ats.: $(2; 1)$.

2. $$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Sprendimas.

Užrašome sistemos koeficientų matricą ir laisvųjų narių stulpelį:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuojame determinantus:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - 0 \cdot 4 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 7 \cdot 2 = 28 + 8 - 3 - 28 = 5,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) \cdot 1 - 0 \cdot (-3) \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 7 \cdot 1 = 28 - 6 - 3 - 14 = 5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) \cdot 2 =$$

$$= -12 + 6 + 8 - 16 - 3 + 12 = -5,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 7\cdot 1 + 0\cdot(-3)\cdot 2 + 1\cdot 4\cdot 1 - 0\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot(-3)\cdot 1 - 1\cdot 7\cdot 2 = 7+4+3-14 = 0.$$

Sprendiniui gauti pritaikome Kramerio formules:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{5} = -1,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{5} = 0.$$

Ats.: $(1; -1; 0)$.

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Sprendimas.

Užrašome sistemos koeficientų matricą ir laisvųjų narių stulpelį:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuojame determinantus:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot(-3) - 1\cdot 3\cdot 0 - 1\cdot 2\cdot(-3) - 1\cdot(-1)\cdot 1 = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Kadangi $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, tai sistema turi be galo daug sprendinių. Rasime juos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3, \\ 3x_1 - x_2 = -2x_3, \end{cases}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \end{pmatrix};$$

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1) - 1\cdot 3 = -1 - 3 = -4,$$

$$\Delta_1^* = \begin{vmatrix} -t & 1 \\ -2t & -1 \end{vmatrix} = -t\cdot(-1) - 1\cdot(-2t) = t + 2t = 3t,$$

$$\Delta_2^* = \begin{vmatrix} 1 & -t \\ 3 & -2t \end{vmatrix} = 1\cdot(-2t)-(-t)\cdot 3 = -2t+3t = t;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1^*}{\Delta^*} = -\frac{3t}{4},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2^*}{\Delta^*} = -\frac{t}{4},$$

$$x_3 = t, \ \ t \in R,$$

čia x_1 ir x_2 yra baziniai kintamieji, o x_3 yra laisvai pasirenkamas.

Ats.: $\left(-\frac{3t}{4}; -\frac{t}{4}; t\right)$.

4. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$

<u>Sprendimas.</u>

Užrašome sistemos koeficientų matricą ir laisvųjų narių stulpelį:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Apskaičiuojame determinantus:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3)\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 2\cdot(-1) - 1\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot(-3)\cdot 4 =$$

$$= -9+4-2-6+1+12 = 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 11 & -3 & 1 \\ 10 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3)\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 10 + 1\cdot 11\cdot(-1) - 1\cdot 11\cdot 3 - 2\cdot 1\cdot(-1) - 1\cdot(-3)\cdot 10 =$$

$$= -18+10-11-33+2+30 = -20.$$

Kadangi $\Delta = 0$, o $\Delta_1 \neq 0$, tai sistema yra nesuderinta.

Ats.: Ø.

3.2. Atvirkštinės matricos metodas

(2) kvadratinę tiesinių lygčių sistemą galima užrašyti tokiu pavidalu:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Jos matricinė lygtis

$$A \cdot X = B,$$

čia A – sistemos pagrindinė matrica,

X – nežinomųjų matrica,

B – laisvųjų narių matrica.

Jei $|A| \neq 0$, tai (2)-os sistemos sprendinys randamas atvirkštinę koeficientų matricą padauginus iš laisvųjų narių stulpelio:

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Pavyzdys.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Sprendimas.

Užrašome sistemos koeficientų matricą ir laisvųjų narių stulpelį:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix};$$

Surandame matricos A atvirkštinę matricą:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 28 + 8 - 3 - 28 = 5;$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 28 - 3 = 25, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -(0-2) = 2,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(16-6) = -10, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 14 = -10, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(1-0) = -1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 14 = -14,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(3-8) = 5,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 0 = 7;$$

Patikriname, ar $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 2 & -14 \\ -10 & 0 & 5 \\ -10 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 25+0-20 & 2+0-2 & -14+0+14 \\ 100-70-30 & 8+0-3 & -56+35+21 \\ 50-10-40 & 4+0-4 & -28+5+28 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sistemos sprendinį randame atvirkštinę matricą padauginę iš laisvųjų narių stulpelio:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 2 & -14 \\ -10 & 0 & 5 \\ -10 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 25-6-14 \\ -10+0+5 \\ -10+3+7 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ats.: $(1; -1; 0)$.

3.3. Gauso metodas

Gauso metodu vadinamas toks tiesinių lygčių sistemos (1) sprendimo būdas, kai elementariaisiais pertvarkiais eliminuojant nežinomuosius sistema suvedama į trikampę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad c_{mn}x_n = d_m, \end{cases}$$

arba į trapecinę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + c_{1k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + c_{2k+1}x_{k+1} + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad c_{kk}x_k + c_{kk+1}x_{k+1} + \ldots + c_{kn}x_n = d_k. \end{cases}$$

Trikampė tiesinių lygčių sistema turi vienintelį sprendinį, o trapecinė lygčių sistema turi be galo daug sprendinių.

Gauso metodu galima išspręsti bet kokią tiesinių lygčių sistemą (ne tik kvadratinę). Tiesines lygčių sistemas sprendžiant šiuo metodu galima atlikti tokius veiksmus:

1) sistemos lygtis sukeisti vietomis;
2) sistemos lygtį dauginti iš skaičiaus (tik ne iš nulio);
3) sudėti dvi sistemos lygtis;

4) šalinti iš sistemos dvi vienodas lygtis (tapatybė).

PASTABA.

1) Tiesinių lygčių sistema turi be galo daug sprendinių, jei pašalinus tapatybę gaunama, kad nežinomųjų yra daugiau nei lygčių.
2) Tiesinių lygčių sistema yra nesuderinta (sprendinių neturi), jei po kurio nors pertvarkymo susidaro lygtis, kurios visi koeficientai yra nuliai, o laisvasis narys – nelygus nuliui, t. y. $0 = b$.

Pavyzdžiai.

1. $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

Sprendimas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c}(-4)\;\;(-2)\\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & -5 & -7 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-7) \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ :(-5) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ši paskutinė lentelė atitinka tokią lygčių sistemą:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Ats.: $(1; -1; 0)$.

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 = 0; \end{cases}$

Sprendimas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c}(-3)\;\;(-1)\\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ \quad - 4x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Pažymėkime laisvuoju kintamuoju $x_3 = t,\ \ t \in R.$

Tuomet iš antros sistemos lygties turime, kad

$$-4x_2 - t = 0,$$

$$x_2 = -\frac{t}{4}.$$

Iš pirmos sistemos lygties turime, kad

$$x_1 - \frac{t}{4} + t = 0.$$

$$x_1 = -\frac{3t}{4}.$$

Ats.: $\left(-\frac{3t}{4}; -\frac{t}{4}; t\right).$

3. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 10. \end{cases}$$

Sprendimas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 11 \\ 4 & -1 & 3 & 10 \end{array}\right)\begin{matrix}(-2) & (-4) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Kadangi paskutinė lygtis $0 = -5$ neturi prasmės, tai duotoji sistema yra nesuderinta.

Ats.: Ø.

3.4. Gauso ir Žordano metodas

Gauso ir Žordano metodas yra Gauso metodo modifikacija. Pagal šį metodą nuosekliai eliminuojant nežinomuosius (1)-oji tiesinių lygčių sistema suvedama ne į trikampę ar trapecinę, bet į diagonalinę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 & & & = \beta_1, \\ & \alpha_{22}x_2 & & = \beta_2, \\ & \dots & \dots & \dots\ \dots \\ & & \alpha_{nn}x_n & = \beta_n, \end{cases}$$

arba pusiau diagonalinę tiesinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1k}x_k + \alpha_{1k+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \qquad\quad \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2k}x_k + \alpha_{2k+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha_{kk}x_k + \alpha_{kk+1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k. \end{cases}$$

Diagonalinė sistema turi vienintelį sprendinį

$$\left(\frac{\beta_1}{\alpha_{11}}; \frac{\beta_2}{\alpha_{22}}; \ldots; \frac{\beta_n}{\alpha_{nn}}\right).$$

Tuo tarpu pusiau diagonalinė lygčių sistema turi be galo daug sprendinių.

Pavyzdys.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Sprendimas.

Atliekame ekvivalenčius pertvarkymus taip, kad elementai, esantys ne tik po pagrindine įstrižaine, bet ir virš jos, taptų nuliais:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right):3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right):(-4) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)(-3) \quad 4 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Laisvųjų narių stulpelyje gauname sistemos sprendinį.

Ats.: $(1; 0; -1)$.

Uždaviniai

Išspręskite šias tiesinių lygčių sistemas:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

2. $\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14; \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ -4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 14; \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 = 9; \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2, \\ x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 2; \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10, \\ 4x_2 + 2x_3 = 12; \end{cases}$

7. $\begin{cases} -2x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 0, \\ 0{,}5x_1 - 2x_2 = 0, \\ 0{,}5x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -2, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 4, \\ 8x_1 + 14x_2 - 8x_3 = 6. \end{cases}$

9. Gauso ir Žordano metodu išspręskite lygčių sistemas:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 = 7; \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x_2 + 6x_3 = 10, \\ 4x_1 - 4x_2 + 8x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 13, \\ 5x_1 + x_2 + 12x_4 = 17. \end{cases}$

10. Apskaičiuokite $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2{,}5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4. EKONOMINIŲ OPTIMIZAVIMO UŽDAVINIŲ MATEMATINIS MODELIAVIMAS

Vienas iš svarbiausių ekonomikos uždavinių yra racionalus ūkio organizavimas, sėkmingas finansinės bei investicinės veiklos vykdymas. Sprendžiant tokio pobūdžio verslo veiklos uždavinius, tenka ieškoti optimalių ekonomikos parametrų reikšmių.

4.1. Tiesinio programavimo sąvoka

1. Apibrėžimas.

Optimizavimo uždaviniai vadinami ***tiesinio programavimo uždaviniais***, jei juose apribojimų sistema (galimybės) sudaryta iš tiesinių lygčių bei nelygybių:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad \ldots, \quad x_n \ge 0. \end{cases} \tag{1}$$

Optimizavimo uždavinių tikslo funkcija (interesai) užrašoma taip:

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max F(x). \tag{2}$$

Toks ekonominės veiklos dalyvių galimybių ir interesų užrašymas vadinamas ***matematinio modelio*** sudarymu.

Tai ***standartinis*** tiesinio programavimo (toliau – TP) uždavinys, nes apribojimų sistema sudaryta tik iš nelygybių ir visi kintamieji tenkina neneigiamumo sąlygą.

Jeigu apribojimų sistema sudaryta tik iš lygčių ir visi kintamieji tenkina neneigiamumo sąlygą, tai toks TP uždavinys vadinamas ***kanoniniu***:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ x_j \ge 0, \\ \min \sum_{j=1}^{n} c_jx_j. \end{cases} \tag{3}$$

Sakoma, kad TP uždavinys turi ***bendrąjį*** pavidalą, kai dalis apribojimų yra lygtys, o kita dalis – nelygybės.

2. Apibrėžimas.

Kintamųjų rinkinys $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$, tenkinantis tiesinio programavimo uždavinio apribojimus (1), vadinamas ***leistinąja sprendinių aibe***.

Nelygybių sistemos sprendinys yra kreivėmis apribota plokštumos dalis, kuri tenkina kiekvieną sistemos (1) nelygybę.

TP uždaviniams spręsti yra naudojami **grafinis** ir **analitinis** metodai. Abiejų šių metodų esmė – nuosekliai peržiūrimos leistinų sprendinių srities viršūnės, vienoje iš jų randamas optimalus sprendinys. Grafiniu metodu negalima spręsti tokių uždavinių, kuriuose yra daugiau nei trys kintamieji.

Pavyzdys.

Grafiniu metodu išspręsime tiesinio programavimo uždavinį:

$$\max(4x_1 + 3x_2), \text{ kai}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 32, \\ 2x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

<u>Sprendimas.</u>

- Sudarome tiesines lygtis ir nubraižome tieses:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 32, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 12; & (2) \end{cases}$$

(1):

x_1	9	4
x_2	1	4

(2):

x_1	1	4
x_2	10	4

- Nustatome apribojimų sistemos nelygybių sprendinių aibių pusplokštumes.
- Tikslo funkcijos reikšmėms tirti sudarome lygio lygtį

$$4x_1 + 3x_2 = 0$$

ir brėžiame lygio tiesę.

- Tada ieškome jai lygiagrečios tiesės, kuri yra liestinė sričiai X ir nubrėžta taip, kad visa sritis lieka po šia tiese.
- Tiesių susikirtimo taškas gaunamas išsprendus lygčių sistemą:

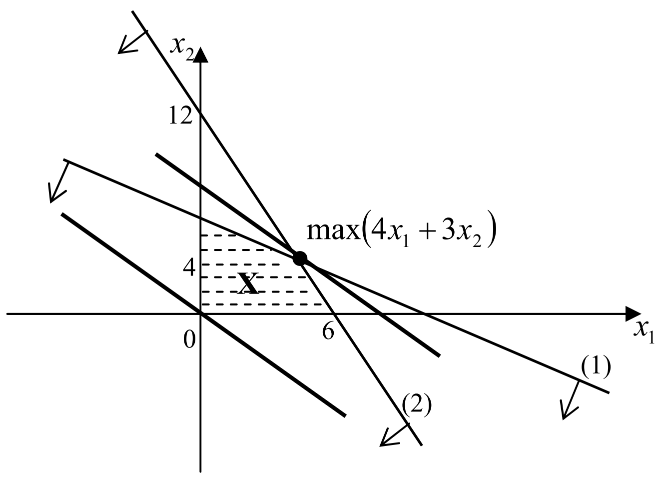
$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 32, \\ 2x_1 + x_2 = 12; \end{cases}$$

$$x_2 = 12 - 2x_1;$$

$$3x_1 + 5(12 - 2x_1) = 32,$$

$$3x_1 + 60 - 10x_1 = 32,$$

$$7x_1 = 28,$$



$x_1 = 4,$

$x_2 = 12 - 2 \cdot 4 = 4.$

- Tikslo funkcijos reikšmė optimaliame taške lygi

  $\max(4x_1 + 3x_2) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 = 28.$

Ats.: $F_{\max}(4;\,4) = 28.$

4.2. Optimizavimo uždaviniai

1. Gamybos planavimo uždavinys.

Cecho bare gaminami dviejų rūšių gaminiai. Vienam I rūšies gaminiui suvartojama 5 kg vario ir 1 kg aliuminio, o vienam II rūšies gaminiui – 3 kg vario ir 2 kg aliuminio. Pardavęs vieną I rūšies gaminį, baras gauna 2 Lt pelno, o už vieną II rūšies gaminį – 3 Lt. Bare yra 45 kg vario ir 16 kg aliuminio. Kiek kiekvienos rūšies gaminių reikia pagaminti, norint gauti didžiausią pelną?

<u>Sprendimas.</u>

- Susisteminame informaciją lentelėje:

Ištekliai	Gaminiai		Žaliavų atsargos
	I rūšies	II rūšies	
Varis, kg	5	3	45
Aliuminis, kg	1	2	16
Pelnas, Lt	2	3	

- Sudarome uždavinio matematinį modelį:

x_1 – I rūšies gaminių kiekis, x_2 – II rūšies gaminių kiekis,

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 45, \\ x_1 + 2x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0; \end{cases}$$

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 \to \max F(x).$$

- Šį uždavinį spręsime grafiškai. Norint pavaizduoti leistinąją sprendinių aibę X, sudarome tiesines lygtis ir nubraižome tieses:

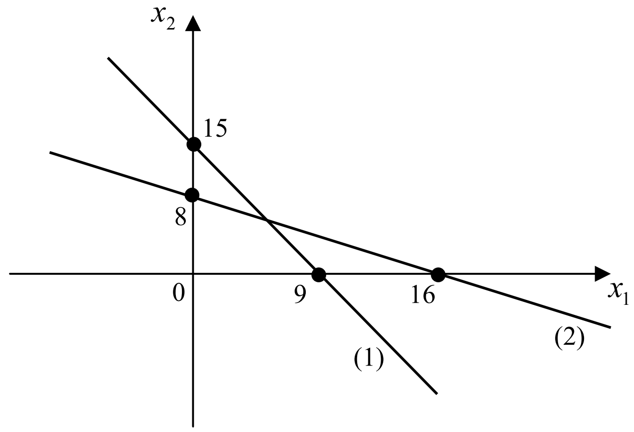
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 45, & (1) \\ x_1 + 2x_2 = 16; & (2) \end{cases}$$

(1):

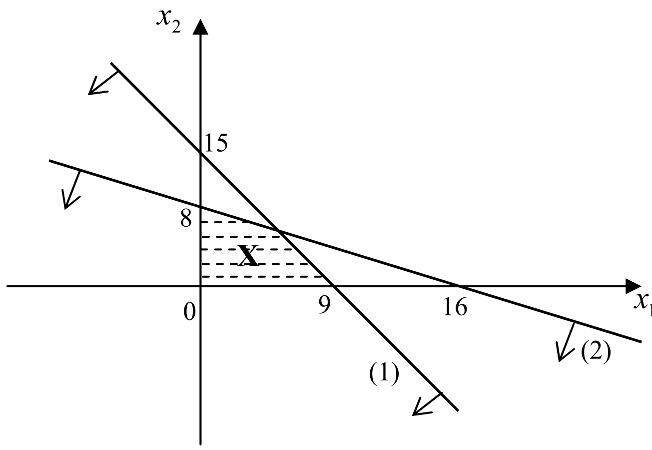
x_1	0	9
x_2	15	0

(2):

x_1	0	16
x_2	8	0



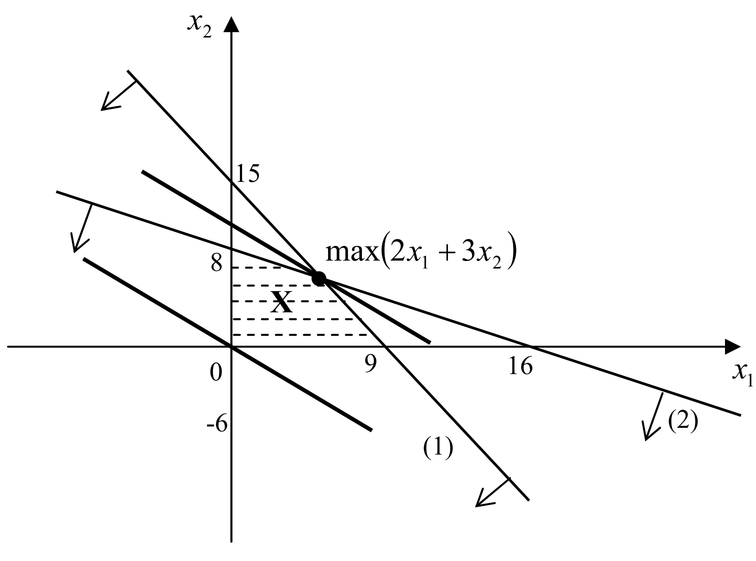
- Nustatome apribojimų sistemos nelygybių sprendinių aibių pusplokštumes:



- Tikslo funkcijos reikšmėms tirti sudarome lygio lygtį ir brėžiame lygio tiesę. Tada ieškome jai lygiagrečios tiesės, kuri yra liestinė sričiai X ir nubrėžta taip, kad visa sritis lieka po šia tiese.

  $2x_1 + 3x_2 = 0.$

x_1	0	9
x_2	0	-6



- Lieka apskaičiuoti maksimumo tašką. Tai (1)-os ir (2)-os tiesių susikirtimo taškas. Jį rasime išsprendę sistemą:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 45, \\ x_1 + 2x_2 = 16; \end{cases}$$

$$x_1 = 16 - 2x_2;$$

$$5(16-2x_2)+3x_2=45,$$

$$80-10x_2+3x_2=45,$$

$$7x_2=35,$$

$$x_2=5; \quad x_1=16-2\cdot 5=6.$$

- Kai pirmos rūšies gaminių pagaminsime 6 vienetus, antros rūšies – 5 vienetus, gausime didžiausią pelną

$$F_{\max}(6;\,5)=2\cdot 6+3\cdot 5=27\ (\text{Lt}).$$

Ats.: $F_{\max}(6;\,5)=27$ Lt.

2. Mišinių (lydinių) uždavinys.

Pašarų davinį galima sudaryti iš šieno ir siloso. Davinyje turi būti ne mažiau kaip 30 mitybinių vienetų, 1 kg baltymų, 100 g kalcio ir 80 g fosforo. Minėtų komponenčių kiekis 1 kg pašarų ir pašarų savikaina nurodyta lentelėje:

Pašarai	Komponentės				Pašarų savikaina (ct/kg)
	Mitybinių vienetų kiekis	Baltymų (g/kg)	Kalcio (g/kg)	Fosforo (g/kg)	
Šienas	0,5	40	1,25	2	12
Silosas	0,5	10	2,5	1	8

Reikia sudaryti pašarų davinį, kurio savikaina būtų mažiausia.

Sprendimas.

- Sudarome uždavinio matematinį modelį:

x_1 – šieno kiekis, x_2 – siloso kiekis,

$$\begin{cases} 0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 \geq 30, \\ 40x_1 + 10x_2 \geq 1000, \\ 1{,}25x_1 + 2{,}5x_2 \geq 100, \\ 2x_1 + x_2 \geq 80, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \end{cases}$$

$$F(x_1, x_2) = 12x_1 + 8x_2 \to \min F(x_1, x_2).$$

- Norint pavaizduoti leistinąją sprendinių aibę X, nubraižome pusplokštumes:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 60, & (1) \\ 4x_1 + x_2 \geq 100, & (2) \\ 1{,}25x_1 + 2{,}5x_2 \geq 100, & (3) \\ 2x_1 + x_2 \geq 80; & (4) \end{cases}$$

(1):

x_1	20	40
x_2	40	20

(2):

x_1	20	30
x_2	20	-20

(3):

x_1	0	20
x_2	40	30

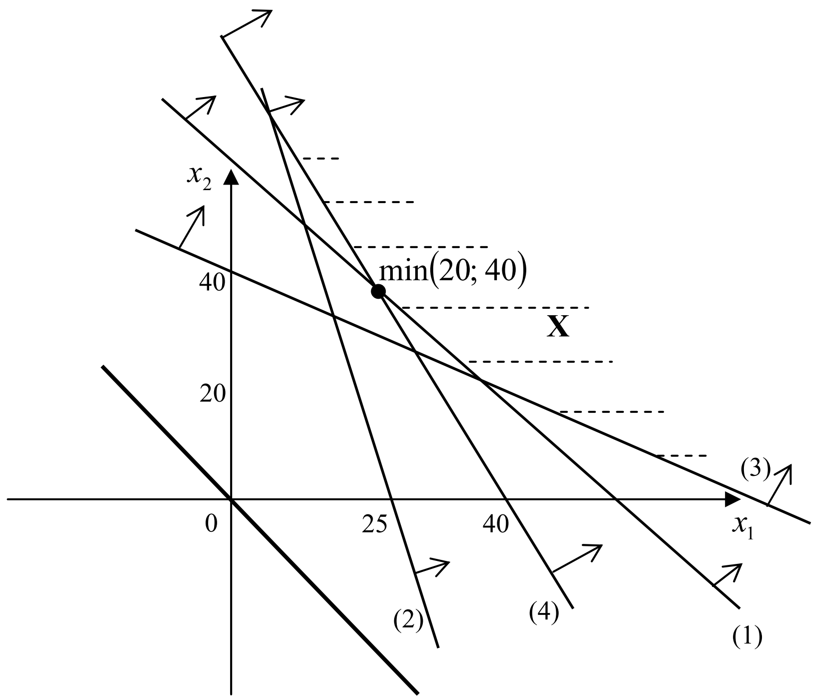
(4):

x_1	20	40
x_2	40	0

- Taip pat nubrėžiame lygio tiesę ir ieškome jai lygiagrečios tiesės, kuri yra liestinė sričiai X ir nubrėžta taip, kad visa sritis lieka virš šios tiesės:

  $12x_1 + 8x_2 = 0;$

x_1	0	20
x_2	0	-30



- Pašarų davinį turi sudaryti 20 kg šieno ir 40 kg siloso, kad savikaina būtų mažiausia:

  $F_{\min}(20;\,40) = 12\cdot 20 + 8\cdot 40 = 560$ (ct/kg).

Ats.: $F_{\min}(20;\,40) = 5{,}60$ Lt/kg.

3. Gamybos pajėgumų racionalaus panaudojimo uždavinys.

Gamybos pajėgumas – tai produkcijos kiekis, kurį įmonė gali pagaminti ir parduoti visiškai panaudodama turimus įrenginius, darbo išteklius ir gerai organizuodama gamybą.

Pavyzdžiui, numatoma gaminti penkių tipų detales naudojant trijų rūšių žaliavas. Šių žaliavų sąnaudos vienai detalei, turimos atsargos bei gaunamas pelnas pardavus kiekvieną detalę pateikti lentelėje:

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	Atsargos
$Ž_1$	2	0	3	11	1	710
$Ž_2$	4	2	3	1	7	790
$Ž_3$	5	1	4	7	11	1160
Pelnas	20	25	12	5	44	

Detalių gamybą reikia suplanuoti taip, kad visos turimos žaliavos būtų sunaudotos, o gautasis pelnas – didžiausias.

<u>Sprendimas.</u>

- Sudarome matematinį modelį:

$$\begin{cases} 2x_1 \phantom{{}+2x_2} + 3x_3 + 11x_4 + x_5 = 710, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + 7x_5 = 790, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 11x_5 = 1160, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}; \end{cases}$$

$$F(x) = 20x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 5x_4 + 44x_5 \to \max F(x).$$

Šį kanoninį uždavinį su penkiais nežinomaisiais suvesime į standartinį optimalaus planavimo uždavinį su dviem nežinomaisiais.

- Apribojimų sistemą spręsime Gauso ir Žordano metodu:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & 11 & 1 & 710 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 7 & 790 \\ 5 & 1 & 4 & 7 & 11 & 1160 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2) \quad (-5) \\ \\ 2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & 11 & 1 & 710 \\ 0 & 2 & -3 & -21 & 5 & -630 \\ 0 & 2 & -7 & -41 & 17 & -1230 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & 11 & 1 & 710 \\ 0 & 2 & -3 & -21 & 5 & -630 \\ 0 & 0 & -4 & -20 & 12 & -600 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ :(-4) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 3 & 11 & 1 & 710 \\ 0 & 2 & -3 & -21 & 5 & -630 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 150 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot 3 \quad (-3) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & -4 & 10 & 260 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & -4 & -180 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 150 \end{array}\right) \text{ arba } \begin{cases} 2x_1 - 4x_4 + 10x_5 = 260, \\ 2x_2 - 6x_4 - 4x_5 = -180, \\ x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 150. \end{cases}$$

- Matome, kad x_1, x_2 ir x_3 yra baziniai kintamieji, o x_4 ir x_5 – laisvieji kintamieji.

Jų sąryšio formulės:

$$\begin{cases} x_1 = 130 + 2x_4 - 5x_5, \\ x_2 = -90 + 3x_4 + 2x_5, \\ x_3 = 150 - 5x_4 + 3x_5. \end{cases}$$

- Įrašę šias išraiškas į tikslo funkciją, gauname

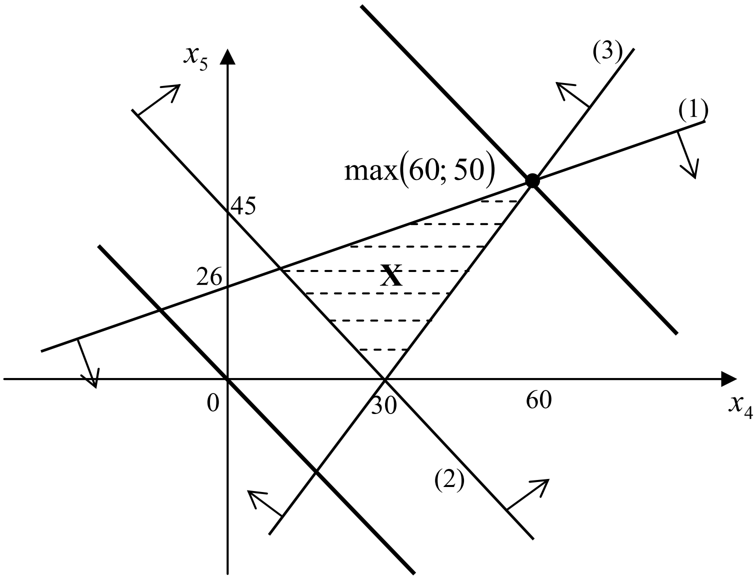
$$F(x) = 20(130 + 2x_4 - 5x_5) + 25(-90 + 3x_4 + 2x_5) + 12(150 - 5x_4 + 3x_5) + 5x_4 + 44x_5,$$

$$F(x) = 60x_4 + 30x_5 + 2150 \to \max F(x).$$

- Kadangi $x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5,$ tai

$$\begin{cases} 130 + 2x_4 - 5x_5 \geq 0, \\ -90 + 3x_4 + 2x_5 \geq 0, \\ 150 - 5x_4 + 3x_5 \geq 0, \\ x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0; \end{cases} \text{arba} \begin{cases} 2x_4 - 5x_5 \geq -130, \\ 3x_4 + 2x_5 \geq 90, \\ -5x_4 + 3x_5 \geq -150, \\ x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0. \end{cases}$$

- Šį uždavinį išspręsime grafiniu metodu:



- Gauname, kad $x_4 = 60, \ x_5 = 50.$ Įrašę šias reikšmes į sąryšio formules, gauname

$$\begin{cases} x_1 = 130 + 2 \cdot 60 - 5 \cdot 50, \\ x_2 = -90 + 3 \cdot 60 + 2 \cdot 50, \\ x_3 = 150 - 5 \cdot 60 + 3 \cdot 50; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 190, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

- Taigi detalių gaminti reikia $\bar{x} = (0; 190; 0; 60; 50)$ ir pelnas bus

$$F(\bar{x}) = 20 \cdot 0 + 25 \cdot 190 + 12 \cdot 0 + 5 \cdot 60 + 44 \cdot 50 = 7\,250 \text{ (Lt)}.$$

Ats.: $F_{\max}(0; 190; 0; 60; 50) = 7\,250$ Lt.

4. Paskirstymo (transporto) uždavinys.

Įmonė turi mineralinio vandens gręžinius Druskininkuose, Pasvalyje ir Birštone. Per savaitę turimi pajėgumai leidžia išpilstyti vandens, kraunamo ant 140, 110 ir 60 padėklų atitinkamai. Vilniaus didmenininkas užsakė 150, o Kauno – 130 padėklų per savaitę. Padėklo transportavimo kaštai (Lt) pateikti lentelėje:

	Vilnius	Kaunas
Druskininkai	18	20
Pasvalys	16	22
Birštonas	10	8

Reikia nustatyti, po kiek vandens padėklų reikia vežti iš kiekvienos jo pilstymo vietos į Vilnių ir Kauną, kad suminiai transporto kaštai būtų mažiausi, t. y. sudaryti optimalaus transportavimo grafiko matematinį modelį.

Sprendimas.

Pažymėkime x_{ij} planuojamų pervežti padėklų kiekį iš i-tojo $(i = 1, 2, 3)$ miesto į j-tąjį $(j = 1, 2)$.

Sudarome pervežimo planą:

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Aišku, kad šie kiekiai neturi viršyti pateiktų pajėgumų:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 140, \\ x_{21} + x_{22} \le 110, \\ x_{31} + x_{32} \le 60. \end{cases}$$

Analogiškai sudarome planuojamų nuvežti kiekių į Vilnių ir Kauną sistemą pagal užsakymą:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 130. \end{cases}$$

Mažiausiai kainuojančiam pervežimų planui sudaryti reikia išspręsti tokį uždavinį:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 140, \\ x_{21} + x_{22} \le 110, \\ x_{31} + x_{32} \le 60, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 150, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 130, \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2; \end{cases}$$

$$F(x) = 18x_{11} + 20x_{12} + 16x_{21} + 22x_{22} + 10x_{31} + 8x_{32} \to \min F(x).$$

Tai bendrojo pavidalo tiesinio programavimo uždavinys. Grafiniu metodu šio uždavinio nepavyks išspręsti, nes nežinomųjų skaičius lygus šešiems. Išsprendę analitiniu simplekso metodu (kurio čia nenagrinėsime), gautume, kad iš Druskininkų reikia vežti 40 padėklų į Vilnių ir 70 į Kauną, iš Pasvalio – visus 110 padėklų į Vilnių ir iš Birštono – visus 60 padėklų į Kauną. Tada mažiausi transporto kaštai bus 4 360 Lt.

Uždaviniai

1. Pavaizduokite grafiškai nelygybės $2x + y \geq -1$ sprendinių aibę.
2. Pavaizduokite grafiškai nelygybių $3x - 4y \geq 0$ ir $3x - 4y \leq 12$ sprendinių aibių sankirtą.
3. Pavaizduokite grafiškai nelygybių sistemos $\begin{cases} 2x - 3y \leq 6, \\ 4x + y \leq 4, \\ 3x - y \leq 3, \\ x \geq 2, \end{cases}$ sprendinių aibę.

Grafiniu metodu išspręskite šiuos uždavinius:

4. $\max(2x_1 + 5x_2)$, kai $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0; \end{cases}$

5. $\max(2x_1 + x_2)$, kai $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \geq -2, \\ 4x_1 + x_2 \leq 4; \end{cases}$

6. $\min(x_1 - 2x_2)$, kai $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \leq 43, \\ 2x_1 - 7x_2 \leq -17, \\ 2x_1 - x_2 \geq 1; \end{cases}$

7. $\min(x_1 - 2x_2)$, kai $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq -1; \end{cases}$

8. $\max(-16x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5)$, kai $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 8, \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}$

9. Batų ateljė siuva dviejų modelių *A* ir *B* avalynę ir jiems pagaminti naudoja trijų rūšių žaliavas, kurių atsargos ribotos. Modelių *A* ir *B* vienai porai pagaminti sunaudojamų žaliavų kiekiai (dm^2) pateikti lentelėje, taip pat nurodyta žaliavų atsargų kiekiai ir pagamintos batų poros sąlyginė kaina (Lt). Sudarykite modelių *A* ir *B* optimalų gamybos planą, kad pajamos, gautos pardavus produkciją, būtų didžiausios.

	Gaminiai		Žaliavų atsargos
	Modelis *A*	Modelis *B*	
$Ž_1$	5	0	100
$Ž_2$	4	4	120
$Ž_3$	4	8	160
Gaminio kaina	60	30	

10. Siuvykloje siuvamoms kelnėms ir švarkams naudojamos trijų tipų žaliavos: oda, audinys ir siūlai. Žaliavų sąnaudų normos (metrais) kiekvienam siuviniui, turimos atsargos (metrais) ir pelnas (litais) už kiekvieną parduotą siuvinį pateikti lentelėje:

	Kelnės	Švarkas	Atsargos
Oda	2	6	420
Audinys	3	3	270
Siūlai	9	6	720
Pelnas	20	30	

Sudarykite didžiausią pelną duosiantį gamybos planą.

11. Kompanija gamina dažus, skirtus išorės bei vidaus darbams, panaudodama dviejų rūšių $Ž_1$ ir $Ž_2$ žaliavas. Lentelėje pateikiami uždavinio pagrindiniai duomenys:

	Žaliavų ištekliai kiekvienai dažų tonai		Atsargos
	Išorės darbams	Vidaus darbams	
$Ž_1$	6	4	24
$Ž_2$	1	2	6
Pelnas (tūkst./t)	5	4	

Dažų gaminimas vidaus darbams negali viršyti dažų gaminimo išorės darbams daugiau nei 1 tona. Didžiausias pagamintų dažų kiekis vidaus darbams neturi viršyti 2 tonų. Apskaičiuoti didžiausią gamybos pajėgumą bei žaliavų panaudojimą.

12. Baldų įmonė dviejuose cechuose gamina lovas ir kušetes. Vienai lovai pagaminti sugaištama 12 valandų pirmame ceche ir 8 valandos – antrame ceche. Vienai kušetei pagaminti sugaištama 8 valandos pirmame ceche ir 12 valandų – antrame ceche. Pardavusi lovą, įmonė gauna 400 Lt pelną, o pardavusi kušetę – 300 Lt. Didžiausias mėnesio valandų skaičius pirmame ceche yra 840 valandų, o antrame ceche – 600 valandų. Kiek lovų ir kušečių turi pagaminti įmonė per mėnesį, kad pardavus produkciją pelnas būtų didžiausias? Koks didžiausias pelnas? Susistemintą informaciją pateikite lentelėje.

13. Įmonė gamina langus ir duris. Gaminių sąnaudų normos vienam gaminiui pagaminti, turimos atsargos ir pelnas už kiekvieną parduotą gaminį pateikti lentelėje:

Ištekliai	Gaminys		Atsargos, terminas
	Langai	Durys	
Mediena, kg	10	5	300
Stiklas, kg	5	4	200
Laikas, val.	15	10	600
Pelnas, Lt	30	20	

Sudarykite optimalų gamybos planą.

14. Įmonė gamina dviejų tipų kėdes „Kapitonas“ ir „Partneris“. „Kapitoną“ parduoda už 50 Lt, „Partnerį“ už 90 Lt. Jų gamybai naudojami metaliniai ir plastikiniai profiliai. „Kapitonui“ reikia 2 metalinių ir 3 plastikinių profilių, o „Partneriui“ atitinkamai 4 ir 1. Jų tiekimas ribotas ir yra 70 ir 62 vienetai per pamainą. Rinkos tyrimai rodo, kad neapsimoka gaminti daugiau nei 10 „Partnerio“ tipo kėdžių per pamainą. Pagrindinius uždavinio duomenis pateikite lentelėje ir sudarykite didžiausias pajamas duosiantį gamybos planą.

15. Įmonė gamina dviejų rūšių grindų plyteles: paprastas ir spalvotas. Abiejų rūšių plytelės gaminamos iš vienodo kiekio smėlio, žvyro ir cemento. 10 m^2 spalvotų plytelių pagaminti sunaudojami 2 litrai dažų. Darbo laiko sąnaudos 10 m^2 plytelių: spalvotų – 2 val. mašinų (mechanizmų) darbo ir 3 žmogaus darbo valandos, paprastų – atitinkamai 1 ir 3 darbo valandos. Pelnas už 10 m^2 spalvotų plytelių – 30 Lt, o paprastų – 20 Lt. Turimi ištekliai: 10 mašinų darbo valandų, 24 žmogaus darbo valandos ir 8 litrai dažų. Sudarykite uždavinio matematinį modelį ir apskaičiuokite, kiek reikia pagaminti abiejų rūšių plytelių, kad gautume didžiausią pelną.
16. Įmonė planuoja pirkti daugiausia 10 autobusų, kurie galėtų pervežti mažiausiai 360 keleivių. Pasirinkti du autobusų modeliai „Fiat“ ir „Volvo“. „Fiat“ autobusas gali pervežti 40 keleivių ir kainuoja 20 000 Lt, o „Volvo“ autobusas – 30 keleivių ir kainuoja 15 000 Lt. Kiek ir kokio modelio autobusų turi nupirkti įmonė, kad atitiktų keleivių vežimo reikalavimus, o išlaidos pirkiniams būtų mažiausios? Kokia mažiausia pirkinio kaina?
17. Gamykla gamina padėklus, naudojamus statyboje, bei grindinius (padėklus) pirtims. Padėklai gaminami iš trijų tipų žaliavų: medienos, smeigių ir varžtų. Jų sąnaudos vienai prekei pagaminti bei turimos atsargos surašytos lentelėje:

Ištekliai	Statybinis padėklas	Padėklas pirčiai	Atsargos
Mediena	2	12	720
Smeigės	2	3	270
Varžtai	9	3	900

Bendrosios išlaidos (žaliavoms, įrenginių amortizacijai, elektros energijai, darbo užmokesčiui ir kt.) statybiniam padėklui pagaminti sudaro 210 Lt, pirties padėklui – 170 Lt. Abi prekės parduodamos vienodomis kainomis – po 250 Lt už kiekio vienetą.

Sudarykite optimalų gamybos planą, kai gamykla siekia:

a) tik kuo didžiausių pajamų;
b) kuo didžiausio pelno.

Apskaičiuokite pajamas ir pelną abiem atvejais.

18. Pagal parengtą gamybos technologiją produkcija gali būti gaminama tik tokiu atveju, jeigu produkcijos P1 ir P2 pagaminama ne mažiau kaip po 3 vienetus, ir ne daugiau kaip 30 vienetų kiekvienos iš 4 produkcijos rūšių. Produkcijai pagaminti turimi ištekliai, jų sunaudojimo normos produkcijos vienetui pagaminti ir pelnas, gaunamas pardavus produkcijos vienetą, pateikti lentelėje. Parenkite uždavinio matematinį modelį.

Ištekliai	Produkcija				Turimas išteklių kiekis
	P1	P2	P3	P4	
Darbas	2	2	5	1	50
Žaliavos	6	5	4	5	100
Finansai	5	7	8	4	100
Pelnas	10	15	20	12	

19. Cementas gaminamas dviejose įmonėse. Pirmoje per dieną pagaminama 30, o antroje – 40 tonų cemento. Pagamintas cementas vežamas į tris namų statybos kombinatus, kurių užsakymai yra atitinkamai 10, 25 ir 35 tonos. Cemento pervežimo iš įmonių į kombinatus vienos tonos vidutinės kainos tokios:

	1 kombinatas	2 kombinatas	3 kombinatas
1 įmonė	40	50	36
2 įmonė	35	45	52

Parenkite pigiausio pervežimo plano matematinį modelį.

20. Trys broliai – Jonas, Petras ir Povilas – statyboms nori pasiskolinti pinigų. Jonui reikia 50 €, Petrui – 40 €, Povilui – 60 €. Paskolinti visus 150 € gali du bankai: $B_1 = 80\,€$, $B_2 = 70\,€$, tačiau reikalauja skirtingų palūkanų. Lentelėje pateiktos palūkanų normos:

	B_1	B_2
Jonui	9	12
Petrui	15	8
Povilui	12	30

Sudarykite uždavinio matematinį modelį, kai iš abiejų bankų pasiskolintų pinigų bendroji palūkanų norma yra mažiausia.

5. AIBIŲ TEORIJA

5.1. Aibės sąvoka

Matematikos neišmokstame – prie jos tiesiog priprantama.

Dž. fon Neimanas

1. Apibrėžimas.

Aibė – tai įvairių objektų rinkinys (pvz., studentų aibė, įvairių Europos miestų aibė, natūraliųjų skaičių aibė ir t. t.). Aibės žymimos didžiosiomis raidėmis: X, Y, A, B,...

2. Apibrėžimas.

Aibę sudarantys objektai vadinami ***aibės elementais*** ir žymimi mažosiomis raidėmis: a, b, c, y,...

Kai a yra aibės A elementas, rašoma $a \in A$ (a priklauso aibei A). Kai a nepriklauso aibei A, rašoma $a \notin A$.

Aibių užrašymo būdai:

1. Išvardijant elementus tarp figūrinių skliaustų.

Pavyzdys.

Natūraliųjų skaičių aibė sudaryta iš elementų $N = \{1; 2; 3; \ldots\}$.

Realiųjų skaičių aibė $R = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

---

2. Nurodant sąlygas, kurias turi tenkinti aibės elementai.

Pavyzdys.

Išvardysime aibės $A = \{x : \ (x^2 - 4) \cdot (x - 1) = 0\}$ elementus.

Sprendimas.

$$(x^2 - 4) \cdot (x - 1) = 0,$$

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{arba} \quad x - 1 = 0$$

$$x = \pm 2; \qquad x = 1.$$

Ats.: $A = \{-2; 1; 2\}$.

---

3. Apibrėžimas.

Baigtinės aibės – tai aibės, turinčios baigtinį elementų skaičių.

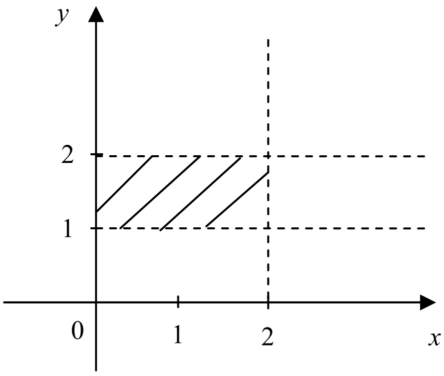
Begalinės aibės – tai aibės, turinčios be galo daug elementų.

Tuščioji aibė Ø – tai aibė, kuri neturi nei vieno elemento.

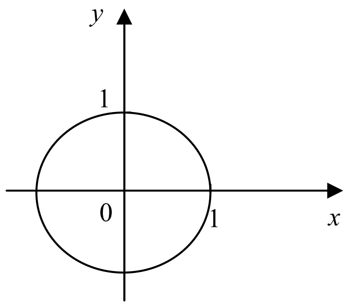
Pavyzdžiai.

Pavaizduosime aibes:

1. $A = \{(x, y):\quad 0 \le x \le 2,\quad 1 \le y \le 2\}$;



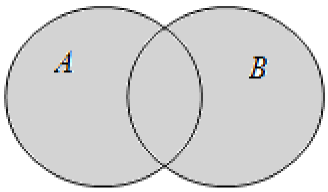
2. $B = \{(x, y):\quad x^2 + y^2 = 1\}$;



5.2. Veiksmai su aibėmis

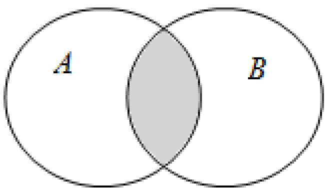
1. **Apibrėžimas.**

Aibių A ir B ***sąjunga*** vadinama aibė $A \cup B$, sudaryta iš elementų, priklausančių bent vienai iš aibių A arba B.



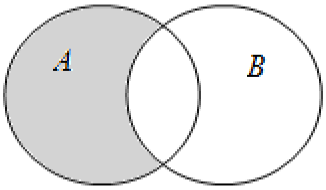
2. **Apibrėžimas.**

Aibių A ir B ***sankirta*** vadinama aibė $A \cap B$, sudaryta iš elementų, priklausančių ir aibei A, ir aibei B.

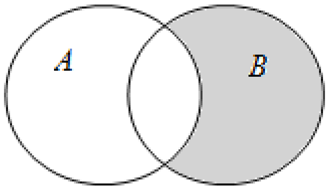


3. **Apibrėžimas.**

Aibių A ir B ***skirtumu*** vadinama aibė $A \setminus B$, kurią sudaro aibės A elementai, nepriklausantys aibei B.



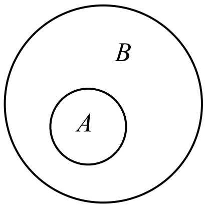
$A \setminus B$



$B \setminus A$

4. Apibrėžimas.

Jeigu kiekvienas aibės A elementas priklauso ir aibei B, tai A yra B ***poaibis*** $A \subset B$.



5. Apibrėžimas.

Aibės A ir B vadinamos ***lygiomis***, kai jos yra viena kitos poaibis, t. y.

$$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow A = B.$$

Kitaip sakant, aibės A ir B yra lygios, jei jos sudarytos iš tų pačių elementų.

6. Apibrėžimas.

Aibių A ir B ***Dekarto sandauga*** yra sudaryta iš visų porų (a, b), kurių pirmoji komponentė a yra aibės A elementas, o antroji komponentė b yra aibės B elementas:

$$A \times B = \{(a, b): \quad a \in A, \quad b \in B\}.$$

Pavyzdžiai.

1. Rasime aibių $A = \{-2; 0; 1\}$ ir $B = \{-1; 0; 2\}$ sąjungą $A \cup B$, sankirtą $A \cap B$, skirtumus $A \setminus B$, $B \setminus A$ ir Dekarto sandaugą $A \times B$.

   Sprendimas.

   $A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$,

   $A \cap B = \{0\}$,

   $A \setminus B = \{-2; 1\}$,

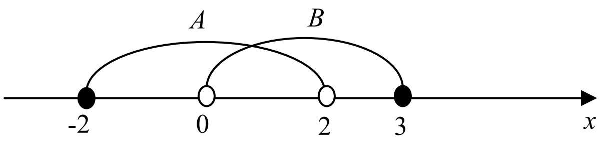
   $B \setminus A = \{-1; 2\}$,

   $A \times B = \{(-2; -1); (-2; 0); (-2; 2); (0; -1); (0; 0); (0; 2); (1; -1); (1; 0); (1; 2)\}$.

2. Rasime aibių $A = \{x: \quad -2 \le x < 2\}$ ir $B = \{x: \quad 0 < x \le 3\}$ sąjungą $A \cup B$, sankirtą $A \cap B$ ir skirtumus $A \setminus B$, $B \setminus A$.

   Sprendimas.

   Pavaizdavę aibes ant Ox ašies, matome, kad



$A \cup B = \{x: \quad -2 \le x \le 3\} = [-2; 3]$,

$A \cap B = \{x: \quad 0 < x < 2\} = (0; 2)$,

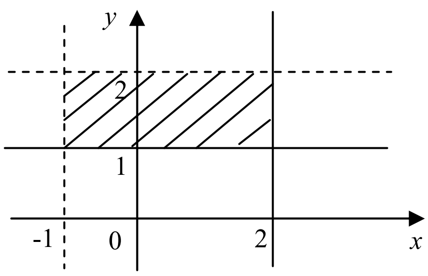
$A \setminus B = \{x: \quad -2 \le x \le 0\} = [-2; 0]$,

$B \setminus A = \{x: \quad 2 \le x \le 3\} = [2; 3]$.

3. Rasime aibių $A = \{x: \quad -1 < x \le 2\}$ ir $B = \{y: \quad 1 \le y < 2\}$ Dekarto sandaugą $A \times B$.

   Sprendimas.

   $A \times B = \{(x, y): \quad -1 < x \le 2, \quad 1 \le y < 2\}$.



4. Apskaičiuosime $A \cup (B \cap C) \cup D$, kai $A = \{-1; 0; 2\}$, $B = \{-1; 0; 5\}$, $C = \{5\}$ ir $D = \{0\}$.

   Sprendimas.

   Pirmiausia atliekame veiksmus skliausteliuose:

   $B \cap C = \{-1; 0; 5\} \cap \{5\} = \{5\}$.

   Tuomet atliekame veiksmus iš eilės:

   $A \cup (B \cap C) = \{-1; 0; 2\} \cup \{5\} = \{-1; 0; 2; 5\}$,

   $A \cup (B \cap C) \cup D = \{-1; 0; 2; 5\} \cup \{0\} = \{-1; 0; 2; 5\}$.

Ats.: $\{-1; 0; 2; 5\}$.

Uždaviniai

1. Užrašykite šias aibes, išvardydami jų elementus:

   a) $A = \{x : x^2 + 5x - 6 = 0\}$;

   b) $B = \{x : x^2 - 1 = 0\}$;

   c) $C = \{x : x^2 + x + 13 = 0\}$.

2. Raskite aibių A ir B sąjungą $A \cup B$, sankirtą $A \cap B$, skirtumus $A \setminus B$ ir $B \setminus A$:

   a) $A = \{-1; 0; 3\}$, $B = \{-2; -1; 3; 5\}$;

   b) $A = \{1; 2; 4; 7\}$, $B = \{-1; 2; 3; 4; 8\}$;

   c) $A = \{-2; 2; 3\}$, $B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$;

   d) $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$;

   e) $A = \{x : x^2 + x - 6 = 0\}$, $B = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$;

   f) $A = (-2; 0)$, $B = (-1; 1]$;

   g) $A = [-4; 4]$, $B = (0; 3]$;

   h) $A = \{x : -3 < x < 4\}$, $B = \{x : 0 \leq x \leq 7\}$;

   i) $A = \{x : 1 \leq x < 3\}$, $B = \{x : x^2 - 2x < 0\}$;

   j) $A = [-1; 4)$, $B = \{x : x^2 - 2x + 1 = 0\}$;

   k) $A = (-2; 1)$, $B = \{x : x^2 - 9 \geq 0\}$;

   l) $A = [1; 4]$, $B = \{x : x^2 + 6 > 5x\}$.

3. Atlikite veiksmus su aibėmis $A = \{1; 3; 5\}$, $B = \{2; 4; 6\}$, $C = \{1; 2; 3\}$ ir $D = \{0; 2\}$:

   a) $(A \cup B) \cap (C \cap D)$;

   b) $(B \setminus A) \setminus (C \cup D)$.

4. Atlikite veiksmus su aibėmis $A = \{2; 5\}$, $B = \{1; 4; 5\}$, $C = \{0; 1\}$ ir $D = \{-1; 4\}$:

   a) $(A \cap B) \cup (D \setminus C)$;

   b) $(D \setminus A) \cap (B \cup C)$;

   c) $(A \cap B) \cup (D \cap B) \cup C$;

   d) $C \times D$.

5. Apskaičiuokite:

   a) $A \cup \varnothing$;

   b) $A \cap \varnothing$;

   c) $A \setminus \varnothing$;

   d) $\varnothing \setminus A$.

6. Nustatykite, kurios lygybės tarp natūraliųjų ir realiųjų skaičių aibių yra teisingos:

   a) $N = R \cap N$;
   b) $R = R \cap N$;
   c) $N = R \cup N$;
   d) $R = R \cup N$.

7. Pavaizduokite aibes:

   a) $A = \{(x, y): \quad x + y = 1\}$;
   b) $B = \{(x, y): \quad x^2 + y^2 \leq 1\}$.

8. Pavaizduokite aibių $A = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ ir $B = \{y : 2 < y < 4\}$ Dekarto sandaugą.

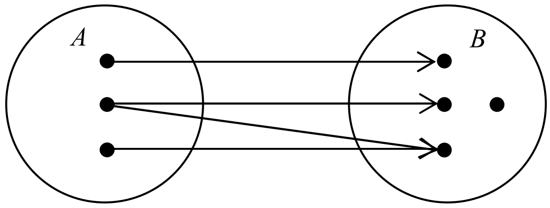
9. Grupėje yra 12 studentų, kurie moka bent vieną iš dviejų kalbų: anglų arba vokiečių. Žinoma, kad 7 studentai moka anglų kalbą, o 8 – vokiečių. Apskaičiuokite, keli studentai moka abi kalbas.

6. FUNKCIJOS

6.1. Funkcijos sąvoka

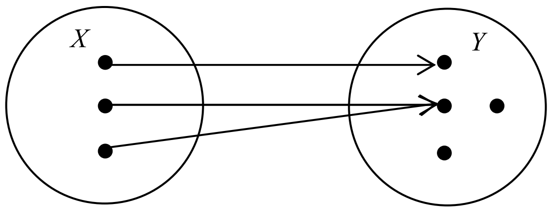
1. Apibrėžimas.

Atitiktimi tarp aibių A ir B vadinama taisyklė, kuri kiekvienam aibės A elementui priskiria vieną arba kelis aibės B elementus.



2. Apibrėžimas.

Jei kiekvieną aibės X elementą x atitinka vienas ir tik vienas aibės Y elementas y, tai tų aibių atitiktis vadinama ***funkcija***.



Funkcijos žymimos $f : X \to Y$ arba $x \xrightarrow{f} y$, arba $y = f(x)$,

čia x – nepriklausomasis kintamasis (argumentas),

y – priklausomasis kintamasis (funkcija).

Aibė X vadinama funkcijos ***apibrėžimo sritimi***, o aibė $Y = \{f(x) : x \in X\}$ funkcijos ***kitimo (arba reikšmių) sritimi***.

Pavyzdžiai.

Rasime funkcijų apibrėžimo sritis:

1. $y = \dfrac{1 + x^3}{x^3 - 36x}$.

Sprendimas.

Duota funkcija neegzistuoja tuose taškuose, kuriuose vardiklis lygus nuliui. Taigi apibrėžimo sritį sudaro visi taškai, išskyrus:

$x^3 - 36x = 0,$

$x \cdot (x^2 - 36) = 0,$

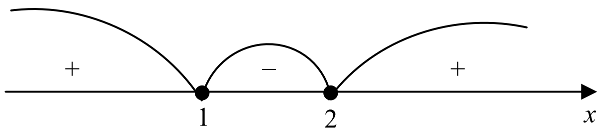
$x = 0$ arba $x^2 - 36 = 0$

$x = \pm 6.$ Ats.: $x \in (-\infty; -6) \cup (-6; 0) \cup (0; 6) \cup (6; +\infty).$

2. $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$.

Sprendimas.

Kadangi pošaknis turi būti neneigiamas, tai



$x^2 - 3x + 2 \geq 0;$

$x^2 - 3x + 2 = 0,$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1,$

$x_1 = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = 2,$

$x_2 = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = 1.$

Ats.: $x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty).$

3. $y = \frac{\lg x}{\sqrt{8 - x}}.$

Sprendimas.

$$\begin{cases} x > 0, \\ 8 - x > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x < 8. \end{cases}$$

Ats.: $x \in (0; 8).$

3. Apibrėžimas.

Funkcijos $y = f(x)$ ***grafiku*** vadinama aibė plokštumos taškų:

$$G = \{(x, y): \quad x \in X, \quad y = f(x)\}.$$

Pavyzdys.

Tegul k – prekės kaina (Lt),

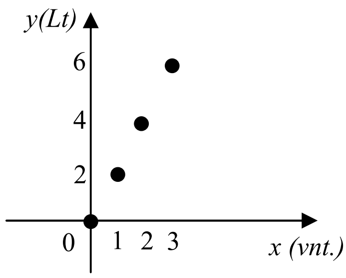
x – parduotos prekės kiekis (vnt.).

Tuomet lygybė $y = kx$ apibrėžia funkciją tarp parduoto prekės kiekio x ir gautos pinigų sumos y.

Tarkime, $X = \{0; 1; 2; 3\}$, $k = 2$ ir

$Y = \{y: \quad y = 2x, \quad x \in X\}.$

Tuomet funkcijos grafikas G yra aibė plokštumos taškų $(x; 2x)$, šiuo atveju – keturių taškų sistema.



Funkcijos reiškimo būdai:

1) žodžiais;
2) lentele;
3) grafiku;
4) lygtimi.

4. Apibrėžimas.

Sakykime f yra funkcija, kurios apibrėžimo sritis yra X, o reikšmių sritis Y.

Jei egzistuoja tokia funkcija, kurios apibrėžimo sritis yra Y, o reikšmių sritis X, tai ji vadinama ***atvirkštine funkcija*** ir žymima f^{-1} :

$$f(x)=y \Rightarrow f^{-1}(y)=x.$$

Pavyzdys.

Rasime funkcijos $y=2-\dfrac{1}{x-3}$ atvirkštinę funkciją.

Sprendimas.

$$\frac{y-2}{1}=-\frac{1}{x-3},$$

$$\frac{x-3}{1}=-\frac{1}{y-2},$$

$$x-3=\frac{1}{2-y},$$

$$x=3+\frac{1}{2-y}; \quad y=3+\frac{1}{2-x}.$$

Ats.: $y=3+\dfrac{1}{2-x}$.

5. Apibrėžimas.

Funkcija $y=f(x)$ vadinama ***didėjančia*** tam tikrame intervale (a,b), jei su bet kuriais šio intervalo taškais x_1 ir x_2, kai $x_1<x_2$ galioja nelygybė $f(x_1)<f(x_2)$, t. y.

$$\forall x_1, x_2: \quad x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

6. Apibrėžimas.

Funkcija $y=f(x)$ vadinama ***mažėjančia*** intervale (a,b), jei su bet kuriais šio intervalo taškais x_1 ir x_2, kai $x_1<x_2$, galioja nelygybė $f(x_1)>f(x_2)$, t. y.

$$\forall x_1, x_2: \quad x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

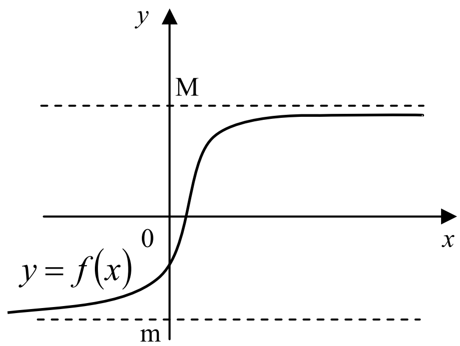
7. Apibrėžimas.

Vien tik didėjanti arba vien tik mažėjanti intervale funkcija vadinama ***monotonine***.

8. Apibrėžimas.

Funkcija $y = f(x)$ vadinama ***aprėžtąja*** intervale (a, b), jei yra tokie skaičiai m ir M, kad su visomis $x \in (a, b)$ reikšmėmis galioja nelygybė $m \le f(x) \le M$, t. y.

$$\exists\, m, M : \forall x \in (a, b) \Rightarrow m \le f(x) \le M .$$



Pavyzdžiui, $\sin(x)$ ir $\cos(x)$ yra aprėžtos funkcijos intervale $[-1; 1]$.

Jeigu galioja nelygybė $f(x) \le M$, tai ši funkcija intervale (a, b) aprėžta iš viršaus, jeigu $f(x) \ge m$ – tai funkcija aprėžta iš apačios.

9. Apibrėžimas.

Funkcija $y = f(x)$ vadinama ***lygine***, jei $\forall x \in X,\ f(-x) = f(x)$.

Funkcija $y = f(x)$ vadinama ***nelygine***, jei $\forall x \in X,\ f(-x) = -f(x)$.

Pavyzdžiai.

1. Funkcija $f(x) = x^2$ yra lyginė, nes

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

2. Funkcija $f(x) = x + x^3$ yra nelyginė, nes

$$f(-x) = -x + (-x)^3 = -x - x^3 = -(x + x^3) = -f(x).$$

3. Funkcija $f(x) = x^2 + x$ – nei lyginė, nei nelyginė, nes

$$f(-x) = x^2 - x .$$

6.2. Funkcijos riba

1. Apibrėžimas.

Jei x ir a yra realieji skaičiai, tai ***atstumu*** $\rho(x, a)$ tarp šių skaičių vadinamas jų skirtumo modulis

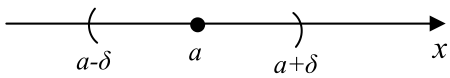
$$\rho(x, a) = |x - a|.$$

2. Apibrėžimas.

Tarkime, kad $\delta > 0$, o a – pasirinktas taškas.

Skaičių tiesės ***taško*** a ***aplinka*** $U_\delta(a)$ vadinama tokia intervalų sąjunga:

$$U_\delta(a) = (a - \delta;\, a) \cup (a;\, a + \delta).$$



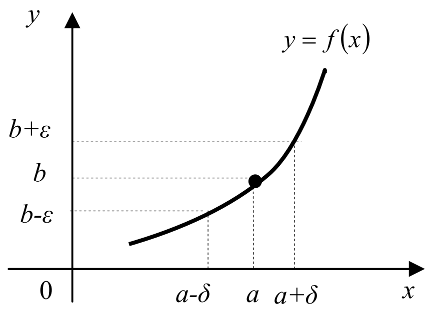
3. Apibrėžimas (Koši ribos apibrėžimas arba apibrėžimas „ε-δ“ kalba).

Skaičius b vadinamas funkcijos $f(x)$ ***riba*** taške a, kai kiekvieną teigiamą skaičių ε atitinka toks teigiamas skaičius δ, kad visos x reikšmės iš taško a aplinkos tenkina nelygybę $|f(x) - b| < \varepsilon$, t. y.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0: \quad |x - a| < \delta,\, x \neq a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Žymima $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Paprastai tariant, funkcijos riba yra skaičius, prie kurio artėja funkcijos reikšmė, nepriklausomojo kintamojo reikšmei artėjant prie nurodyto skaičiaus.



<u>**Pagrindinės ribų teoremos.**</u>

1) Pastovaus dydžio riba yra pastovus dydis:

$$\lim_{x \to a} C = C, \; C \text{ – konstanta.}$$

<u>Pvz.</u>: $\lim\limits_{x \to 1} 5 = 5$.

2) Pastovų daugiklį galima iškelti prieš ribos ženklą:

$$\lim_{x \to a} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x \to a} f(x).$$

Pvz.: $\lim\limits_{x\to 2}\left(3\cdot x^2\right)=3\cdot\lim\limits_{x\to 2}x^2=3\cdot 2^2=12$.

3) Funkcijų algebrinės sumos (skirtumo) riba lygi funkcijų ribų algebrinei sumai (skirtumui):

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x).$$

Pvz.: $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}1=0+1=1$.

4) Funkcijų sandaugos riba lygi dauginamųjų funkcijų ribų sandaugai:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

Pvz.: $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\cdot\cos x)=\lim\limits_{x\to 0}\sin x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\sin 0\cdot\cos 0=0\cdot 1=0$.

5) Funkcijų dalmens riba lygi dalinio ir daliklio ribų dalmeniui, jei daliklio riba nelygi nuliui:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)},\quad \lim_{x\to a}g(x)\neq 0.$$

Pvz.: $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2+x}{x^2-3}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(2+x)}{\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2-3\right)}=\dfrac{2+(-1)}{(-1)^2-3}=-\dfrac{1}{2}$.

4. Apibrėžimas.

Jeigu funkcijos $f(x)$ riba lygi nuliui $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, tai funkcija vadinama ***nykstančia***, kai $x\to a$.

Jeigu funkcijos $f(x)$ riba lygi begalybei $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, tai funkcija vadinama ***neaprėžtai didėjančia***, kai $x\to a$.

Pavyzdžiai.

1. Funkcija $f(x)=x^2-x$ vadinama nykstančia, kai $x\to -1$, nes

$$\lim_{x\to -1}\left(x^2+x\right)=(-1)^2-1=0.$$

2. Funkcija $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ vadinama neaprėžtai didėjančia, kai $x\to 1$, nes

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}=\frac{1+1}{1-1}=\left(\frac{2}{0}\right)=\infty.$$

PASTABA.

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty}\ \text{ir}\ \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0},\ \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}=0\quad(\alpha>0)}$$

5. Apibrėžimas.

Funkcija $f(x)$ vadinama ***tolydžia*** taške x_0 (neturinti trūkio taškų), jei funkcijos riba lygi funkcijos reikšmei tame taške:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

6.3. Ribų skaičiavimas

Norint apskaičiuoti ribą, iš pradžių reikia nustatyti, ar nėra neapibrėžtumo. Neapibrėžtumai yra

$$\left(\frac{0}{0}\right),\quad \left(\frac{\infty}{\infty}\right),\quad (\infty - \infty),\quad (0 \cdot \infty),\quad (1^{\infty}),\quad (\infty^{0}),\quad (0^{0}).$$

Tokiais atvejais reikia funkciją pertvarkyti taip, kad neapibrėžtumas išnyktų.

Skaičiuojant ribas, naudojami tokie simboliniai skaičiavimai:

$$\left(\frac{a}{0} = \infty\right),\quad \left(\frac{a}{\infty} = 0\right),\ \text{čia } a \in R.$$

- <u>Neapibrėžtumas</u> $\left(\frac{0}{0}\right)$ šalinamas suprastinant trupmeninius reiškinius.

Pavyzdžiai.

1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{4}.$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \dfrac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \dfrac{1}{2}.$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-6)(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-4}{x-6} = \dfrac{2-4}{2-6} = \dfrac{1}{2}.$

Trupmenos skaitiklį ir vardiklį išskaidėme dauginamaisiais pasinaudoję formule

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$x^2 - 6x + 8 = 0,$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 8 = 4,$

$x_1 = \dfrac{6-\sqrt{4}}{2} = 2,$

$x_2 = \dfrac{6+\sqrt{4}}{2} = 4;$

$$x^2-6x+8=(x-2)(x-4).$$

$$x^2-8x+12=0,$$

$$D=(-8)^2-4\cdot 12=16,$$

$$x_1=\frac{8-\sqrt{16}}{2}=2,$$

$$x_2=\frac{8+\sqrt{16}}{2}=6;$$

$$x^2-8x+12=(x-2)(x-6).$$

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-9x^2+24x-16}{x^2-3x-4}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$

Kadangi trupmenos skaitiklį sudaro daugianaris, tai jam išskaidyti pasinaudosime dalyba kampu. Tokiu būdu galima išskaidyti ir vardiklį. Kadangi reikia apskaičiuoti ribą, kai $x\to 4$, tai dalijame iš $(x-4)$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-9x^2+24x-16 & x-4 \\ \hline
-\ x^3-4x^2 & x^2-5x+4 \\
\quad -5x^2+24x & \\
-\ -5x^2+20x & \\
\qquad 4x-16 & \\
-\ 4x-16 & \\
\qquad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^2-3x-4 & x-4 \\ \hline
-\ x^2-4x & x+1 \\
\quad x-4 & \\
-\ x-4 & \\
\quad 0 &
\end{array}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-9x^2+24x-16}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x^2-5x+4)(x-4)}{(x+1)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x+1}=\frac{16-20+4}{4+1}=\frac{0}{5}=0.$$

- Neapibrėžtumo $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ šalinimas.

Pavyzdžiai.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3+x+4}{14x^6-x^2-5x^3}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Esant tokiam neapibrėžtumui, trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalijame iš x didžiausiu laipsniu, t. y. iš x^6:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^3+x+4}{14x^6-x^2-5x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9x^3}{x^6}+\frac{x}{x^6}+\frac{4}{x^6}}{\frac{14x^6}{x^6}-\frac{x^2}{x^6}-\frac{5x^3}{x^6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{4}{x^6}}{14-\frac{1}{x^4}-\frac{5}{x^3}}=\frac{0+0+0}{14-0-0}=\frac{0}{14}=0.$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-4}{x+2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalijame iš x didžiausiu laipsniu, šiuo atveju iš x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4+3x^4}{x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{4}{x^4}+\frac{3x^4}{x^4}}{\frac{x}{x^4}+\frac{2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{4}{x^4}+3}{\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=\frac{0+3}{0+0}=\left(\frac{3}{0}\right)=\infty.$$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+x+6}{3x^2-x-2}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

Trupmenos skaitiklį ir vardiklį dalijame iš x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+x+6}{3x^2-x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{9+\frac{1}{x}+\frac{6}{x^2}}{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{9+0+0}{3-0-0}=3.$$

PASTABA.

Dviejų daugianarių $P_n(x)$ ir $Q_m(x)$ santykio riba apskaičiuojama palyginus abiejų daugianarių aukščiausius laipsnius:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0, & n<m\\ \infty, & n>m\\ \dfrac{p_n}{q_m}, & n=m\end{cases}$$

- <u>Neapibrėžtumas</u> $(\infty-\infty)$ šalinamas trupmenas bendravardiklinant:

Pavyzdys.

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to2}\frac{x-2-1}{(x-2)^2}=\lim_{x\to2}\frac{x-3}{(x-2)^2}=\left(\frac{-1}{0}\right)=-\infty.$$

Pirmoji pagrindinė riba:

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}=a}$$

Pavyzdžiai.

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{5x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\dfrac{2}{5}.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1\cdot 1=1.$

Antroji pagrindinė riba:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e} \text{ arba } \boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

Pavyzdžiai.

1. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{x}{x-3}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 3}(1+2x-5-1)^{\frac{x}{x-3}}=\lim\limits_{x\to 3}(1+2x-6)^{\frac{1}{2x-6}\cdot\frac{(2x+6)x}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{(2x+6)x}{x-3}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}2x}=e^{6}.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+3x}{3x-4}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1+3x}{3x-4}-1\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{3x-4}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{3x-4}\right)^{\frac{3x-4}{5}\cdot\frac{5x}{3x-4}}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x}{3x-4}}=e^{\frac{5}{3}}.$

Uždaviniai

Raskite funkcijų apibrėžimo sritį:

1. $y=\frac{5}{x^2-7x+10}$

2. $y=\frac{-x}{x^2-x-6}$

3. $y=\frac{1}{x^2(x-1)}$

4. $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

5. $y=\sqrt{x+7}+\sqrt{x}$

6. $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x-1}$

7. $y=\sqrt{\frac{x+7}{x}}$

8. $y=\sqrt{\frac{4-x^2}{1-x}}$

9. $y=\ln(1-x)+\frac{2}{\sqrt{2-x}}$

10. $y=\ln x+\frac{2}{\sqrt{6-x}}$

11. $y=\frac{\lg\left(4-x^2\right)}{\sqrt{x+1}}$

12. $y=\log_{2x}\left(x+1\right)$

Raskite atvirkštines funkcijas:

13. $y=\frac{10-5x}{2}$

14. $y=\frac{4}{x}-1$

15. $y=\frac{5-2x}{x+1}$

16. $y=\frac{3-4x}{2x}$

17. $y=\sqrt[6]{x^5}$

18. $s=\sqrt[5]{t^3}$

19. $T(a)=\frac{a}{7-2a}$

20. Išreikškite iš funkcijos $I=\frac{U}{R+r}$ kintamąjį r.

Apskaičiuokite ribas:

21. $\lim\limits_{x\to 8}\frac{x+2}{\sqrt[3]{x}-2}$

22. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^3-1}$

23. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x-5}$

24. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-1}$

25. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

26. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

27. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

28. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10}$

29. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-2x^2+16}{x^4+x^3-x-10}$

30. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{9x^3+9x^2-x-1}$

31. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+3x^2-4}{x^3-x^2-x+1}$

32. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x^2-1}\right)$

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-2x^2+1}{1-x^2}$

34. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+2}{4x^2-7-2x^7}$

35. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^4+x^2+4}{10-5x^5}$

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-3x^2-x^4}{2x-x^2+1}$

37. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x+1}$

38. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x}{\cos 2x}$

39. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 6x}{2x}$

40. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\sin x}{x}$

41. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot\cos 5x}{x}$

42. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 3x}{x^2}$

43. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

44. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin 3x}$

45. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

46. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x+3}-\frac{x-1}{2}\right)$

47. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+2}-3x\right)$

48. $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{2}{x}}$

49. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{8x}\right)^{\frac{4x}{5}}$

50. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{\frac{1}{2x}}$

7. SKAIČIŲ EILUTĖS

7.1. Skaičių eilutės sąvoka

1. Apibrėžimas.

Seka – tai kažkokia tvarka išrašyta skaičių (arba kitų elementų) aibė.

Pavyzdžiui, $\{1; 2; 3; \ldots\}$ arba $\{A; B; C; D; E\}$.

Sekoje yra svarbi narių tvarka, pavyzdžiui, šios sekos nėra ekvivalenčios:

$$\{A; B; C\} \text{ ir } \{C; B; A\}.$$

Seka gali turėti baigtinį arba begalinį narių skaičių.

2. Apibrėžimas.

Visų funkcijos $f(n)$, kai $n \in N$, reikšmių aibė, išrašyta argumento didėjimo tvarka, vadinama ***skaičių seka***

$$\{f(n)\} = f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots \tag{1}$$

Pavyzdys.

Funkcijos $f(n) = \dfrac{1}{n}$ skaičių seka yra $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots$.

---

3. Apibrėžimas.

Iš skaičių sekos $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sudarytas reiškinys

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{2}$$

vadinamas ***skaičių eilute***, o elementas a_n – eilutės ***bendruoju nariu***.

Pavyzdžiai.

1. Jeigu turime skaičių seką $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots, \dfrac{1}{n}, \ldots,$ tai šios sekos skaičių eilutė užrašoma tokiu būdu:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

2. Eilutės $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{16} + \ldots$ bendrojo nario formulė užrašoma taip: $a_n = \dfrac{n}{2^n}$.

---

4. Apibrėžimas.

Suma

$$S_m = a_1 + a_2 + \ldots + a_m = \sum_{n=1}^{m} a_n \tag{3}$$

vadinama m-tąja ***daline suma***.

Pavyzdys.

Eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ dalinė suma $S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{m}}$.

5. Apibrėžimas.

Jei egzistuoja eilutės (2) dalinių sumų sekos $\{S_m\}$ baigtinė riba, kai $m \to \infty$, t. y., jei

$$S = \lim_{m\to\infty} S_m, \tag{4}$$

tai ši riba S vadinama ***eilutės suma***, o pati eilutė vadinama ***konverguojančia***. Kai minėtoji riba yra begalinė arba neegzistuoja, eilutė vadinama ***diverguojančia***.

Pavyzdys.

Apskaičiuosime eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}$ dalinę sumą S_m ir eilutės sumą S.

Sprendimas.

Eilutės dalinė suma užrašoma taip:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2 + 3n + 2}.$$

Norint ją apskaičiuoti, visų pirma pertvarkome eilutės bendrąjį narį:

$$\frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

$$1 = An + 2A + Bn + B,$$

$$\begin{cases} 2A + B = 1, \\ A + B = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1, \\ B = -1. \end{cases}$$

Tuomet eilutės dalinė suma lygi:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \overset{n=1}{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)} + \overset{n=2}{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)} + \overset{n=3}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)} + \ldots + \overset{n=m-1}{\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right)} + \overset{n=m}{\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{m+2},$$

o eilutės suma apskaičiuojama taip:

$$S = \lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}\right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

Ats.: $S_m = \frac{1}{2} - \frac{1}{m+2}$, $S = \frac{1}{2}$.

Skaičių eilučių savybės.

1) Jei eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ konverguoja (diverguoja), tai konverguoja (diverguoja) ir eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k \cdot S, \quad k \in R.$$

2) Jei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, tai eilutė, gauta panariui sudėjus, taip pat konverguoja ir

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

3) Jei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, tai eilutė, gauta panariui atėmus, taip pat konverguoja ir

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = A - B.$$

7.2. Konvergavimo požymiai

1. Būtinasis konvergavimo požymis.

Jei eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguoja, tai bendrojo nario riba lygi nuliui:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Šis požymis yra tik būtinasis, bet ne pakankamasis eilutės konvergavimui pagrįsti. Iš šios sąlygos dar neišplaukia, kad eilutė konverguoja.

Pavyzdžiui, harmoninė eilutė

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguoja, nors jos bendrojo nario riba lygi nuliui

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

2. Palyginimo požymis.

Jei teigiamų eilučių $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ bendrieji nariai tenkina nelygybę $a_n \le b_n$, kai $n \in N$, tai

a) jei eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguoja, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ taip pat konverguoja;

b) jei eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguoja, tai eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ taip pat diverguoja.

Kitaip tariant, jei konverguoja eilutė, turinti didesnius narius, tai konverguoja ir eilutė su mažesniais nariais; jei diverguoja eilutė su mažesniais nariais, tai diverguoja ir eilutė, kurios nariai didesni.

3. Ribinis palyginimo požymis.

Jeigu egzistuoja eilučių $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ir $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ baigtinė ir nelygi nuliui riba, t. y.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L, \quad L \ne 0 \quad \text{ir} \quad L \ne \infty,$$

tai abi eilutės kartu konverguoja arba kartu diverguoja.

Pavyzdys.

Ištirsime eilutės $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n^2 + n + 3}$ konvergavimą.

<u>Sprendimas.</u>

Yra žinoma, kad Dirichlė eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad p \in R$$

konverguoja, kai $p > 1$, ir diverguoja, kai $p \le 1$.

Vadinasi, eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguoja.

Pasinaudoję tuo, turime

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{5n^2 + n + 3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{5n^2 + n + 3} = \frac{1}{5}.$$

Vadinasi, duota eilutė taip pat konverguoja.

4. Dalambero požymis.

Tarkime, duota teigiama skaičių eilutė $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ir egzistuoja riba

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L.$$

Tuomet duota eilutė

1) konverguoja, kai $L<1$;
2) diverguoja, kai $L>1$;
3) gali konverguoti arba diverguoti, kai $L=1$. Tokiu atveju eilutės konvergavimo tyrimui reikėtų taikyti kitą požymį.

Pavyzdys.

Ištirsime eilutės $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$ konvergavimą.

<u>Sprendimas.</u>

Pasinaudoję Dalambero požymiu, turime:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot 3^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot n^n}{(n+1)^n}=3\cdot\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=$$

$$=3\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1.$$

Ats.: diverguoja.

5. Leibnico požymis.

Alternuojanti eilutė

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

konverguoja, jei jos nariai tenkina sąlygas:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$;
2) $a_1>a_2>a_3>a_4>\ldots>a_n>\ldots$.

Pavyzdys.

Ištirsime eilutės $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ konvergavimą.

<u>Sprendimas.</u>

Eilutė konverguoja, nes tenkinamos Leibnico požymio sąlygos:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n-1}=0;$

2) $1>\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{5}>\ldots.$

Ats.: konverguoja.

---

1. Apibrėžimas.

Eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ vadinama ***absoliučiai konverguojančia***, jei konverguoja jos modulio eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.

Pavyzdys.

Ištirsime eilutės $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n^2+2}$ konvergavimą.

Sprendimas.

Eilutė konverguoja, nes tenkinamos Leibnico požymio sąlygos:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+2}=0;$

2) $\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{6}>\dfrac{1}{11}>\ldots$

Toliau tiriame modulių eilutę:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}.$$

Palyginsime šią eilutę su Dirichle eilute $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ taikydami ribinį palyginimo požymį:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2+2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+2}=1>0.$$

Kadangi Dirichlė eilutė konverguoja, tai ir modulių eilutė konverguoja. Vadinasi, alternuojanti eilutė konverguoja absoliučiai.

Ats.: konverguoja absoliučiai.

---

2. Apibrėžimas.

Jei eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguoja, o eilutė $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverguoja, tai $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ vadinama ***reliatyviai konverguojančia***.

Uždaviniai

1. Parašykite eilutės bendrojo nario formulę a_n:

   a) $\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\ldots;$

   b) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots.$

2. Apskaičiuokite eilutės $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$ ketvirtąjį narį a_4.

3. Parašykite eilutės $\sum_{n=1}^{\infty}\lg n$ bendrojo nario formulę a_n ir apskaičiuokite a_{100}.

4. Apskaičiuokite eilutės dalinę sumą S_m ir sumą S:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n};$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)};$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n^2+5n+6};$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+3)};$

   f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}.$

5. Ištirkite eilučių konvergavimą:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{4n+1};$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)};$

   c) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots;$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2}.$

6. Ištirkite eilučių konvergavimą remdamiesi Dalambero požymiu:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!};$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n};$

   c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)};$

   d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{5^n};$

   e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};$

   f) $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{n}{3^{n-1}}+\ldots.$

7. Ištirkite alternuojančių eilučių konvergavimą:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+1}{2n};$

   b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5}{3n}.$

8. FUNKCIJOS IŠVESTINĖ

8.1. Išvestinės sąvoka

Tarkime, turime vieno kintamojo funkciją $y = f(x)$, apibrėžtą tam tikrame intervale (a, b). Šiame intervale pasirinkime du taškus x ir x_0. Jų skirtumas žymimas

$$\Delta x = x - x_0$$

ir vadinamas ***argumento pokyčiu***. Iš čia gauname, kad

$$x = x_0 + \Delta x,$$

t. y. pradinė reikšmė x_0 įgijo pokytį Δx. O skirtumas

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

vadinamas ***funkcijos pokyčiu*** taške x_0.

1. Apibrėžimas.

Funkcijos kitimo greičiu taške x_0 ***arba išvestine*** vadinama funkcijos pokyčio ir argumento pokyčio santykio riba

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Išvestinė charakterizuoja funkcijos kitimo greitį kintant jos argumentui.

2. Apibrėžimas.

Funkcijos išvestinės išvestinė yra ***antros eilės išvestinė***.

3. Apibrėžimas.

Funkcijos ***diferencialu*** taške x vadinama sandauga

$$dy = y' \cdot \Delta y \text{ arba}$$

$$dy = y' dx.$$

Funkcijos išvestinės radimas vadinamas tos funkcijos ***diferencijavimu*** $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Išvestinės žymimos romėniškais skaitmenimis y', y'', ..., skliausteliuose arabiškais $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ... arba diferencialu $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, ...

TEOREMA.

Jei funkcija $f(x)$ turi išvestinę taške x_0, tai ji šiame taške yra tolydi.

8.2. Diferencijavimo taisyklės

Jeigu $u = u(x)$ ir $v = v(x)$ diferencijuojamos funkcijos, tai:

1. $C' = 0$, C – konstanta
2. $x' = 1$
3. $(Cu)' = C \cdot u'$
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
5. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$

Išvestinių lentelė

1.	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2.	$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
3.	$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$
4.	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
5.	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
6.	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
7.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
8.	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
9.	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
10.	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg}\, u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
11.	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
12.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
13.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'$
14.	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \dfrac{1}{1 + u^2} \cdot u'$
15.	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\dfrac{1}{1 + u^2} \cdot u'$

Sudėtinė funkcija – tai funkcija, priklausanti nuo kitos funkcijos $y = f(u(x))$. Jos išvestinė

$$y' = f'_u \cdot u'_x.$$

Pavyzdžiai.

Apskaičiuosime funkcijų išvestines:

1. $y = \dfrac{x^4}{4} + 5x + \sqrt{x} - 2$,

$$y' = \left(\frac{x^4}{4}\right)' + (5x)' + \left(\sqrt{x}\right)' - 2' = \frac{4x^3}{4} + 5 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = x^3 + 5 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

2. $y = 3\sqrt[3]{x^2}$,

$$y' = \left(3\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(3 \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)' = 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = 2 \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}.$$

3. $y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^9} + x$,

$$y' = \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^9} + x\right)' = \left(x^{-1}\right)' - 2 \cdot \left(x^{-9}\right)' + x' = -x^{-2} + 18 \cdot x^{-10} + 1 = -\frac{1}{x^2} + \frac{18}{x^{10}} + 1.$$

Apskaičiuosime sudėtinių funkcijų išvestines:

4. $y = (1 + 2x)^4$,

$$y' = 4 \cdot (1 + 2x)^3 \cdot (1 + 2x)' = 8(1 + 2x)^3.$$

5. $y = \dfrac{1}{7}e^{7x} + \cos 5x$,

$$y' = \left(\frac{1}{7}e^{7x}\right)' + (\cos 5x)' = \frac{1}{7} \cdot e^{7x} \cdot (7x)' - \sin 5x \cdot (5x)' = e^{7x} - 5\sin 5x.$$

6. $y = \sin^5\left(x^2 + 1\right)$,

$$y' = 5 \cdot \sin^4\left(x^2 + 1\right) \cdot \left(x^2 + 1\right)' = 5 \cdot \sin^4\left(x^2 + 1\right) \cdot 2x = 10x \cdot \sin^4\left(x^2 + 1\right).$$

Apskaičiuosime funkcijų sandaugos išvestinę:

7. $y = x^3 \cdot \ln x$,

$$y' = \left(x^3 \cdot \ln x\right)' = \left(x^3\right)' \cdot \ln x + x^3 \cdot (\ln x)' = 3x^2 \cdot \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \cdot \ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1).$$

Apskaičiuosime funkcijų santykio išvestinę:

8. $y = \dfrac{2x}{3x + 2}$,

$$y' = \frac{(2x)' \cdot (3x + 2) - 2x \cdot (3x + 2)'}{(3x + 2)^2} = \frac{2 \cdot (3x + 2) - 2x \cdot 3}{(3x + 2)^2} = \frac{6x + 4 - 6x}{(3x + 2)^2} = \frac{4}{(3x + 2)^2}.$$

9. Apskaičiuosime funkcijos $y(s)=\frac{1}{s}$ trečios eilės išvestinę:

$$y'(s)=\left(\frac{1}{s}\right)'=\left(s^{-1}\right)'=-s^{-2}=-\frac{1}{s^2},$$

$$y''(s)=\left(-\frac{1}{s^2}\right)'=\left(-s^{-2}\right)'=-(-2)s^{-3}=\frac{2}{s^3},$$

$$y'''(s)=\left(\frac{2}{s^3}\right)'=\left(2s^{-3}\right)'=2\cdot(-3)s^{-4}=-\frac{6}{s^4}.$$

10. Apskaičiuosime funkcijos $y=x^2+\cos x$ diferencialą:

$$dy=\left(x^2+\cos x\right)'dx,$$

$$dy=(2x-\sin x)dx.$$

8.3. Išvestinės taikymai

1. Lopitalio taisyklė (Liopitalio taisyklė) taikoma riboms skaičiuoti, kai yra neapibrėžtumai $\left(\frac{0}{0}\right)$ ir $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Pagrindinė Lopitalio taisyklės esmė yra išvestinės taikymas skaitikliui ir vardikliui atskirai. Jei pritaikius taisyklę, neapibrėžtumai išlieka, galima ją taikyti pakartotinai:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Pavyzdys.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3-8\right)'}{\left(x^2-4\right)'}=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2}{2x}=\lim_{x\to 2}\frac{3x}{2}=3.$$

2. Išvestinės mechaninė prasmė. Taško tiesiaeigio judėjimo greitis $v(t)$ konkrečiu laiko momentu t yra kelio $s(t)$ išvestinė, o pagreitis $a(t)$ yra greičio išvestinė arba kelio antroji išvestinė:

$$v(t)=s'(t),$$
$$a(t)=v'(t)=s''(t).$$

Pavyzdys.

Taško tiesiaeigio judėjimo dėsnis $s(t)=2t^3+t^2-4$. Apskaičiuosime greitį ir pagreitį laiko momentu $t=4\,s$.

Sprendimas.

$$v(t) = \left(2t^3 + t^2 - 4\right)' = 6t^2 + 2t,$$

$$v(4) = 6 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 104;$$

$$a(t) = \left(6t^2 + 2t\right)' = 12t + 2,$$

$$a(4) = 12 \cdot 4 + 2 = 50.$$

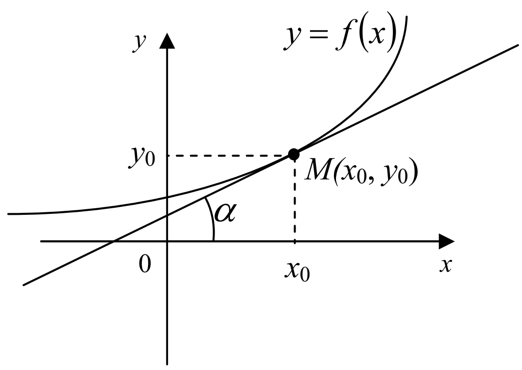
Ats.: 104 m/s, 50 m/s^2.

---

3. Išvestinės geometrinė prasmė.

Išvestinė $f'(x_0)$ yra funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės taške $M(x_0, y_0)$ krypties koeficientas:

$$f'(x_0) = K = tg\alpha,$$



α – kampas, kurį liestinė sudaro su Ox ašimi.

Liestinės, einančios per tašką $M(x_0, y_0)$, lygtis yra

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Normalė – tiesė, statmena kreivės liestinei ir einanti per lietimosi tašką. Normalės lygtis

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Pavyzdys.

Užrašysime parabolės $f(x) = x^2 - 2x + 1$ liestinės ir normalės lygtis taške $x = 2$.

Sprendimas.

Apskaičiuojame funkcijos reikšmę duotame taške:

$$f(x_0) = f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1.$$

Apskaičiuojame funkcijos išvestinę ir jos reikšmę duotame taške:

$$f'(x) = 2x - 2,$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2.$$

Užrašome liestinės lygtį:

$$y = 1 + 2 \cdot (x - 2) = 1 + 2x - 4 = 2x - 3,$$

ir normalės lygtį:

$$y = 1 - \frac{1}{2} \cdot (x - 2) = 1 - \frac{1}{2}x + 1 = -\frac{1}{2}x + 2.$$

Ats.: $y = 2x - 3$, $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

---

4. Funkcijų tyrimas.

- Jei $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, tai funkcija $f(x)$ intervale (a, b) didėja (mažėja).
- Jei $f'(c) = 0$, tai funkcija gali turėti ekstremumą (minimumą arba maksimumą) taške $c \in (a, b)$.
- Jei $f''(c) > 0$, tai taškas c yra minimumo taškas.
- Jei $f''(c) < 0$, tai taškas c yra maksimumo taškas.
- Jei $f''(c) = 0$ – ekstremumo nėra.
- Kreivės taškas $x = c$ vadinamas perlinkio tašku, jei intervale (a, c) funkcijos grafikas iškilas aukštyn, o intervale (c, b) iškilas žemyn, ir atvirkščiai.

Pavyzdys.

Rasime funkcijos $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 8x^2$ ekstremumus, didėjimo bei mažėjimo intervalus.

Sprendimas.

Norint gauti funkcijos ekstremumus, apskaičiuojame jos išvestinę, prilyginame nuliui ir sprendžiame gautą lygtį:

$$f'(x) = -x^3 + 16x,$$

$$-x^3 + 16x = 0,$$

$$x(-x^2 + 16) = 0,$$

$$x = 0 \text{ arba } -x^2 + 16 = 0,$$

$$x = \pm 4.$$

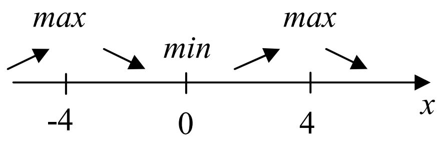
Gavome tris ekstremumus. Toliau rasime antros eilės išvestinę ir apskaičiuosime jos reikšmę ekstremumo taškuose:

$$f''(x) = -3x^2 + 16,$$

$f''(-4) = -3 \cdot (-4)^2 + 16 = -32 < 0$, $\quad x = -4$ yra maksimumo taškas;

$f''(0) = -3 \cdot 0 + 16 = 16 > 0$, $\quad x = 0$ yra minimumo taškas;

$f''(4) = -3 \cdot 4^2 + 16 = -32 < 0$, $\quad x = 4$ yra maksimumo taškas.



Funkcija didėja intervale $(-\infty; -4) \cup (0; 4)$, o mažėja $(-4; 0) \cup (4; +\infty)$.

Funkcijos minimumas ir maksimumas yra

$$f_{\min}(0) = -\frac{1}{4} \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0, \quad f_{\max}(\pm 4) = -\frac{1}{4} \cdot 256 + 8 \cdot 16 = 112.$$

---

5. Taikymai algebroje.

Pavyzdžiai.

1. Dviejų neneigiamų skaičių suma lygi 10. Kokie turi būti skaičiai, kad jų kvadratų suma būtų mažiausia?

   Sprendimas.

   Pažymėkime $x + y = 10$.

   Iš čia turime $y = 10 - x$.

   Tuomet kvadratų suma lygi

   $$S(x) = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100.$$

   Toliau skaičiuojame funkcijos $S(x)$ išvestinę:

   $$S'(x) = 4x - 20,$$

   prilyginame ją nuliui ir sprendžiame gautą lygtį:

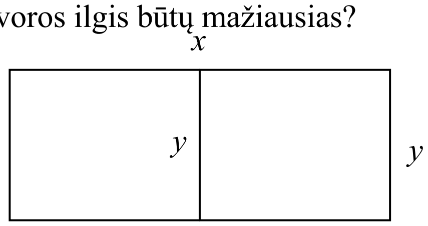
   $4x - 20 = 0,$

   $x = 5,$

   $y = 5.$

   Ats.: 5 ir 5.

2. 294 m^2 ploto stačiakampį žemės sklypą reikia aptverti ir po to perskirti tvora į dvi lygias dalis. Kokie turi būti sklypo matmenys, kad visas tvoros ilgis būtų mažiausias?

   Sprendimas.

   Pažymėkime,

   x – stačiakampio ilgis,

   y – plotis.

   Žinome, kad stačiakampio plotas $S = x \cdot y = 294$.

Iš čia turime $y = \frac{294}{x}$.

Tvoros reikės

$$P = 2x + 3y \text{ arba } P(x) = 2x + 3 \cdot \frac{294}{x} = 2x + \frac{882}{x}.$$

Tuomet apskaičiuojame išvestinę:

$$P'(x) = \left(2x + \frac{882}{x}\right)' = 2 - \frac{882}{x^2} = \frac{2x^2 - 882}{x^2},$$

prilyginame nuliui ir sprendžiame gautą lygtį:

$$\frac{2x^2 - 882}{x^2} = 0,$$

$$2x^2 - 882 = 0, \; x \neq 0,$$

$$x^2 = 441,$$

$$x = \pm 21; \; y = \frac{294}{21} = 14.$$

Ats.: sklypo ilgis – 21 m, plotis – 14 m.

6. Taikymai ekonomikoje.

Jei ryšys tarp dviejų ekonominių rodiklių išreiškiamas funkcija, tai šios funkcijos išvestinė nusako vieno rodiklio kitimo greitį kito atžvilgiu.

Tarkime,

x – planuojamos gaminti produkcijos kiekis;

K – gamybos kaštai;

U – nauda gamintojui.

Tuomet ***ribiniai gamybos kaštai*** lygūs

$$K'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x},$$

o ***ribinis naudingumas***

$$U'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x}.$$

Ekonomikoje dažnai naudojama santykinė išvestinė (arba ***elastingumas***):

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y', \; [\%]$$

Pavyzdys.

Apskaičiuosime funkcijos $y = 2e^x$ elastingumą taške $x = 10$.

Sprendimas.

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{x}{2e^x}\cdot\left(2e^x\right)'=x,$$

$$E_{10}(y)=10.$$

Tai reiškia, kad kintamajam x padidėjus 1 % funkcijos reikšmė padidės 10 %.

Ats.: 10 %.

Paklausos elastingumas kainos atžvilgiu:

$$E_p(q)=\frac{p}{q}\cdot q',$$

čia p – prekės kaina,

q – paklausa.

Bendrųjų kaštų elastingumas:

$$E_x(K)=\frac{x}{K}\cdot K',$$

čia x – kiekis,

K – gamybos kaštai.

Pavyzdys.

Apskaičiuosime paklausos $q=200-\frac{1}{2}p^2$ elastingumą kainos p atžvilgiu, kai $p=10$.

Sprendimas.

$$E_p(q)=\frac{p}{200-\frac{1}{2}p^2}\cdot\left(200-\frac{1}{2}p^2\right)'=\frac{p}{200-\frac{1}{2}p^2}\cdot(-p)=-\frac{2p^2}{400-p^2},$$

$$E_{10}(q)=-\frac{2\cdot 10^2}{400-10^2}=-\frac{2}{3}\approx -0{,}67.$$

Tai reiškia, kad kainai padidėjus 1 % paklausa turėtų sumažėti 0,67 %.

Ats.: 0,67 %.

Uždaviniai

Apskaičiuokite funkcijų išvestines:

1. $y = 2x^3 - \sqrt{3}x + 4$
2. $y = 2\pi + \dfrac{5x^4}{4}$
3. $y = \dfrac{1}{2x^2} + \sqrt[4]{x^3}$
4. $y = \ln x + 2e^x$
5. $y = 6 \cdot \operatorname{ctg} x + 6^x$
6. $y = \sin x \cdot \cos x$
7. $y = x \cdot \log_3 x$
8. $y = 10 \lg x$
9. $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$
10. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
11. $y = e^{\sqrt{x}}$
12. $y = \cos^{20} x$
13. $y = \sqrt[3]{2 + 9x}$
14. $y = \sqrt{\sin 5x}$
15. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$
16. $y = \left(1 + x^2\right)^3$
17. $y = x \cdot \left(x^4 - 2\right)^6$
18. $y = x \cdot e^{-x^2}$
19. $y = e^{x \ln x}$
20. $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x+1}{x-1}$
21. $y = \ln \cos^2 (15x)$
22. $y = \ln x^{\ln e^x}$

23. Apskaičiuokite funkcijos $z(u) = 8 - 2u + 24u^2 - 0{,}3u^5$ antros eilės išvestinę.

24. Apskaičiuokite funkcijos $T(a) = a^3 \ln a$ trečios eilės išvestinę.

25. Apskaičiuokite funkcijos $v(p) = \dfrac{1}{p-2}$ ketvirtos eilės išvestinę.

26. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = \dfrac{2x+3}{3x+2}$ diferencialą taške $x_0 = 1,$ kai $\Delta x = 0{,}1.$

27. Apskaičiuokite ribas taikydami Lopitalio taisyklę:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx - x}{\sin x - x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 - 3x)}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x \cdot e^x - x}$

g) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \cdot e^{2x} - x}{5x^2 + x^3}$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - tgx}$

i) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

28. Kūnas juda pagal dėsnį $s(t) = t^3 + 5t^2 + 4.$ Apskaičiuokite greitį ir pagreitį po 2 s.

29. Kūnas juda pagal dėsnį $s(t) = \sqrt{t}.$ Apskaičiuokite greitį ir pagreitį po 1 s.

30. Taško tiesiaeigio judėjimo lygtis $s(t) = 6t - t^2.$ Kuriuo laiko momentu jo greitis lygus nuliui?

31. Kūno temperatūra kinta pagal dėsnį $T = 0{,}2t^2.$ Koks yra kūno šilimo greitis, kai $t = 10$ s?

32. Kūno temperatūra kinta pagal dėsnį $T = \dfrac{1}{2}t^2 - 2t.$ Koks yra kūno šilimo greitis, kai $t = 5$ s?

33. Srovės stipris kinta pagal dėsnį $I = 0{,}4t^2$. Raskite srovės stiprio kitimo greitį baigiantis aštuntai sekundei.
34. 10 kg masės kūnas juda pagal dėsnį $s(t) = 3t^2 + t + 4$. Raskite kūno kinetinę energiją $E_k = \frac{mv^2}{2}$, praėjus 4 s nuo judėjimo pradžios.
35. Užrašykite kreivės $y = x^3 - 3x$ liestinės, nubrėžtos per tašką $M(2;\,2)$, lygtį.
36. Apskaičiuokite, kokį kampą su Ox ašimi sudaro kreivės $y = -\frac{1}{x+2}$ liestinė taške $x = -1$.
37. Kuriuo kampu į Ox ašį pasvirusi kreivės $y = x^3 - x^2 - 7x + 6$ liestinė, nubrėžta per tašką $A(2;\,-4)$?
38. Raskite funkcijų ekstremumus ir didėjimo bei mažėjimo intervalus:
    a) $f(x) = 2x^4 - x^2$;
    b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$;
    c) $f(x) = x^2 - \ln(1 + 2x)$.
39. Skaičių 18 suskaidykite į du dėmenis taip, kad dėmenų kvadratų suma būtų mažiausia.
40. Raskite du skaičius, kurių suma būtų 120, o vieno iš jų sandauga su kito kvadratu būtų didžiausia.
41. Į skritulį įbrėžtas didžiausio ploto stačiakampis. Jo perimetras lygus 56 cm. Raskite skritulio skersmenį.
42. Apskaičiuokite ribinį naudingumą, kai produkcijos nauda išreiškiama funkcija
    a) $U(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5$ ir gaminamos produkcijos kiekis $x = 10$;
    b) $U(x) = (3x + 4)^3$ ir gaminamos produkcijos kiekis $x = 1$.
43. Apskaičiuokite ribines pajamas, jei prekės paklausos lygtis yra
    a) $q(p) = 100 \cdot (10 + 9p - p^2)$;
    b) $q(p) = 50 \cdot e^{-0{,}02p}$; čia p – prekės kaina, q – gaminių kiekis. Pajamų lygtis $R(p) = p \cdot q(p)$.
44. Apskaičiuokite paklausos q elastingumą kainos p atžvilgiu, kai
    a) $q = 20 - 0{,}1p^3$ ir $p = 5$;
    b) $q = 50 - 5\ln p$ ir $p = 20$.
45. Apskaičiuokite bendrųjų kaštų K elastingumą gaminamos produkcijos kiekio x atžvilgiu, kai
    a) $K(x) = 10 + 2x + 3x^2$ ir $x = 1$;
    b) $K(x) = 5 + 2e^{x+1}$ ir $x = 2$.

9. INTEGRALAI

9.1. Pirmykštė funkcija ir neapibrėžtinis integralas

Panagrinėsime atvirkštinį išvestinei uždavinį, kai turint funkciją $f(x)$ reikia rasti tokią funkciją $F(x)$, kurios išvestinė būtų lygi duotai funkcijai.

1. Apibrėžimas.

Funkcija $F(x)$ vadinama funkcijos $f(x)$ ***pirmykšte funkcija***, jeigu teisinga lygybė

$$F'(x) = f(x).$$

Pavyzdys.

Funkcijos $f(x) = x^2$ pirmykštė funkcija yra

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

čia C – konstanta. Kadangi

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2.$$

Pirmykštės funkcijos nustatymas arba ***integravimas*** yra diferencijavimui atvirkštinis veiksmas.

2. Apibrėžimas.

Jeigu $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, tai reiškinys

$$F(x) + C \quad (C \text{ – konstanta})$$

vadinamas funkcijos $f(x)$ ***neapibrėžtiniu integralu***.

Kitaip sakant, neapibrėžtinis integralas yra visų pirmykščių funkcijų aibė ir žymimas

$$\int f(x)dx,$$

čia $f(x)$ – pointegralinė funkcija,

$f(x)dx$ – pointegralinis reiškinys.

Neapibrėžtinio integralo savybės:

1) $\int C \cdot f(x)dx = C\int f(x)dx$;

2) $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;

3) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;

4) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

5) $\int dF(x) = F(x) + C$.

Pagrindinių integralų lentelė

1.	$\int dx = x + C$
2.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, kai $n \neq -1$
3.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
4.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$
5.	$\int e^x dx = e^x + C$
6.	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
7.	$\int \cos x dx = \sin x + C$
8.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
9.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
10.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $-a < x < a$
11.	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$
12.	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
14.	$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$
15.	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$

9.2. Pagrindiniai integravimo metodai

1. Tiesioginio integravimo metodas.

Šiuo metodu skaičiavimai atliekami tiesiogiai pasinaudojus integravimo formulėmis.

Pavyzdžiai.

1. $\int 5dx = 5\int dx = 5x + C$;

2. $\int (x+1)dx = \int xdx + \int dx = \frac{x^2}{2} + x + C$;

3. $\int \left(3x^2 + \sqrt{x} - 7\right)dx = \int 3x^2 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - 7\int dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 7x + C = x^3 + \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 7x + C$;

4. $\int (3-2x)^2 dx = \int \left(9 - 12x + 4x^2\right)dx = \int 9dx - \int 12xdx + \int 4x^2 dx = 9\int dx - 12\int xdx + 4\int x^2 dx =$

   $= 9x - \frac{x^2}{6} + \frac{4x^3}{3}$;

5. $\int \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x}\right)dx = \int \frac{x^2}{x}dx - \int \frac{5x}{x}dx + \int \frac{6}{x}dx = \int xdx - 5\int dx + 6\int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} - 5x + 6\ln|x| + C$;

6. $\int (\cos x - \sin x)dx = \int \cos xdx - \int \sin xdx = \sin x + \cos x + C$.

---

2. Integravimas keičiant kintamąjį.

Jeigu $x = h(t)$ yra diferencijuojama funkcija, o t – naujasis kintamasis, tai

$$\int f(x)dx = \int f(h(t)) \cdot h'(t)dt.$$

Suintegravus vėl grįžtama prie pradinio kintamojo x.

Pavyzdžiai.

1. $\int e^{x^3} x^2 dx = \left(\begin{array}{l} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \Big/ \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}dt = x^2 dx \end{array}\right) = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$;

2. $\int (3x+2)^4 dx = \left(\begin{array}{l} t = 3x + 2 \\ dt = 3dx \Big/ \cdot \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}dt = dx \end{array}\right) = \frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{1}{3} \cdot \frac{t^5}{5} + C = \frac{(3x+2)^5}{15} + C$;

3. $\int \frac{5x^4}{x^5+7}dx = \begin{pmatrix} t = x^5+7 \\ dt = 5x^4 dx \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^5+7| + C$;

4. $\int \sqrt{3-2x}dx = \begin{pmatrix} t = 3-2x \\ dt = -2dx \Big/ \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}dt = dx \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}t\sqrt{t} + C =$

$= -\frac{1}{3}(3-2x)\sqrt{(3-2x)} + C$;

5. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx = \begin{pmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{pmatrix} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2}dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C$.

---

3. Integravimo dalimis metodas.

Jeigu $u = u(x)$ ir $v = v(x)$ diferencijuojamos funkcijos, tai dalinio integravimo formulė:

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

- Integraluose

  $\int P(x)\ln x dx$, $\int P(x)\arcsin x dx$, $\int P(x)\arccos x dx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}\, x dx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}\, x dx$

  žymima $\left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \mathrm{arctg}\, x, \quad \mathrm{arcctg}\, x \\ dv = P(x)dx \end{array} \right.$

- Integraluose $\int P(x)e^x dx$, $\int P(x)\sin x dx$, $\int P(x)\cos x dx$

  žymima $\left| \begin{array}{l} u = P(x) \\ dv = e^x dx, \quad \sin x dx, \quad \cos x dx \end{array} \right.$

- Integralams $\int e^x \sin x dx$ ir $\int e^x \cos x dx$ apskaičiuoti du kartus taikomas dalinio integravimo metodas ir sprendžiama gauta lygtis.

Pavyzdžiai.

1. $\int x \ln x dx = \begin{pmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{pmatrix} = uv - \int v du = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx =$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$;

2. $\int (x-1)e^{2x}dx = \begin{pmatrix} u = x-1 & \Big| & du = dx \\ dv = e^{2x}dx & \Big| & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{pmatrix} = uv - \int vdu = (x-1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx =$

$= (x-1)\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$;

3. $\int e^x \sin xdx = \begin{pmatrix} u = \sin x & \Big| & du = \cos xdx \\ dv = e^x dx & \Big| & v = e^x \end{pmatrix} = uv - \int vdu = e^x \sin x - \int e^x \cos xdx =$

$= \begin{pmatrix} u = \cos x & \Big| & du = -\sin xdx \\ dv = e^x dx & \Big| & v = e^x \end{pmatrix} = e^x \sin x - \left(e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx\right) =$

$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin xdx$,

$\int e^x \sin xdx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin xdx$,

$2\int e^x \sin xdx = e^x \sin x - e^x \cos x \Big/ \cdot \frac{1}{2}$,

$\int e^x \sin xdx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C$.

9.3. Apibrėžtiniai integralai

Sakykime, atkarpoje $[a, b]$ apibrėžta teigiama ir tolydi funkcija $f(x)$.

Apibrėžtiniams integralams apskaičiuoti taikoma ***Niutono ir Leibnico formulė***

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

čia a – apatinis rėžis,
b – viršutinis rėžis.

<u>Apibrėžtinio integralo savybės:</u>

1) $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

2) $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4) $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$;

VIDURINĖS REIKŠMĖS TEOREMA.

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx,$$

čia μ yra vidurinė funkcijos reikšmė intervale $[a, b]$.

Pavyzdžiai.

1. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Big|_1^2 = \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 3\cdot 2\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3\cdot 1\right) =$

$= \left(\frac{8}{3} - 4 + 6\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 3\right) = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3};$

2. $\int_0^3 \sqrt{1+x}\,dx = \left(\begin{array}{c|c} t = 1 + x & t_a = 1 + 0 = 1 \\ dt = dx & t_v = 1 + 3 = 4 \end{array}\right) = \int_1^4 \sqrt{t}\,dt = \int_1^4 t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{t^3}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}\sqrt{4^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} =$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{4^3} - \sqrt{1^3}\right) = \frac{2}{3}(8 - 1) = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3};$

3. $\int_1^e \ln x\,dx = \left(\begin{array}{c|c} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx & v = x \end{array}\right) = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = x\ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e =$

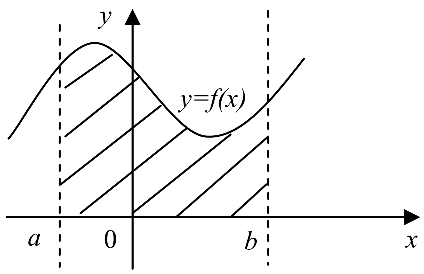
$= e\ln e - \ln 1 - e + 1 = e - 0 - e + 1 = 1.$

9.4. Apibrėžtinio integralo taikymai

1. Plokščiosios figūros plotas.

Funkcija, apribota iš apačios abscisių ašies, iš šonų – tiesių $x = a$ ir $x = b$, iš viršaus – funkcijos $f(x)$ grafiko, vadinama ***kreivine trapecija***. Jos plotas apskaičiuojamas taip:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



Pavyzdys.

Apskaičiuosime figūros, apribotos parabole $y = x^2 - 4x + 4$ ir tiese $2x + y - 7 = 0$, plotą.

<u>Sprendimas.</u>

Iš tiesės lygties turime

$y = 7 - 2x.$

Sulyginę abi lygtis, randame abiejų kreivių susikirtimo taškų abscises:

$x^2 - 4x + 4 = 7 - 2x,$

$x^2-2x-3=0$,

$D=4+12=16$,

$x_1=\dfrac{2+4}{2}=3$,

$x_2=\dfrac{2-4}{2}=-1$.

Tuomet figūros plotas lygus:

$$S=\int_{-1}^{3}\left(\left(7-2x\right)-\left(x^2-4x+4\right)\right)dx=\int_{-1}^{3}\left(-x^2+2x+3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\Bigg|_{-1}^{3}=$$

$$=\left(-\frac{3^3}{3}+3^2+3\cdot 3\right)-\left(-\frac{\left(-1\right)^3}{3}+\left(-1\right)^2+3\cdot\left(-1\right)\right)=\left(-9+9+9\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right)=11-\frac{1}{3}=10\frac{2}{3}.$$

Ats.: $10\frac{2}{3}$ kv. vnt.

2. Sukinio tūris.

Jei kreivinė trapecija sukama apie Ox ašį, gauto sukinio tūris apskaičiuojamas pagal formulę:

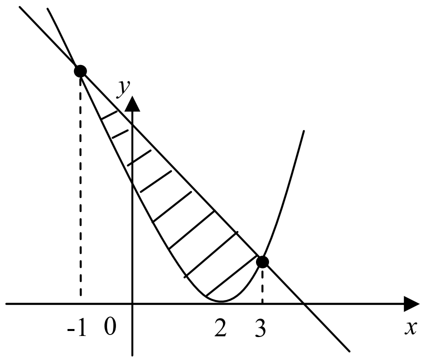
$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx,$$

jei sukama apie Oy ašį:

$$V_y=\pi\int_a^b x^2dy.$$

Pavyzdys.

Apskaičiuosime tūrį sukinio, gauto sukant apie Ox ašį figūrą, apribotą parabole $y=2x-x^2$ ir tiese $y=0$.



Sprendimas.

Sulyginę lygtis, randame abiejų kreivių susikirtimo taškų abscises:

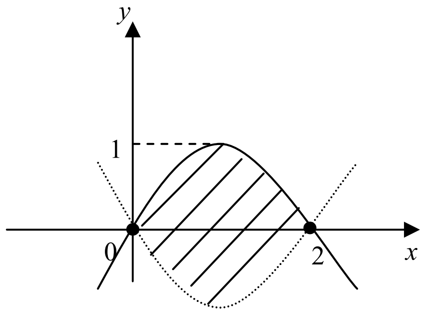
$2x-x^2=0$,

$x\left(2-x\right)=0$,

$x_1=0$, $x_2=2$.

Tuomet figūros tūris lygus:

$$V_x=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2dx=\pi\int_0^2\left(4x^2-4x^3+x^4\right)dx=\pi\left(\frac{4x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=\pi\left(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5}\right)=\frac{16}{15}\pi.$$



Ats.: $\frac{16}{15}\pi$ kub. vnt.

3. Kreivės lanko ilgis.

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx\,.$$

Pavyzdys.

Apskaičiuosime kreivės $y=\sqrt{x^3}$ lanko ilgį tarp taškų $A(0;\,0)$ ir $B(4;\,5)$.

Sprendimas.

$$y'=\left(\sqrt{x^3}\right)'=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}\,,$$

$$l=\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\,\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{4\cdot 2}{9\cdot 3}\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^3}\,\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(\sqrt{10^3}-1\right)=$$

$$=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)\approx 8{,}89\,.$$

Ats.: $\approx 8{,}89$ ilgio vnt.

4. Nueitam keliui rasti.

Kelias s, kurį nueina taškas tolydžiu greičiu $v(t)$, apskaičiuojamas

$$s=\int_{t_0}^{T} v(t)\,dt\,.$$

Pavyzdys.

Taškas juda greičiu $v(t)=6t^2+4$. Raskite nueitą kelią per 5 s nuo judėjimo pradžios.

Sprendimas.

$$s=\int_0^5\left(6t^2+4\right)dt=\left(2t^3+4t\right)\Big|_0^5=250+20=270\ \text{(m)}.$$

Ats.: 270 m.

5. Mechaniniam darbui apskaičiuoti.

Mechaninis darbas A, kurį atlieka jėga $F(x)$, perkeldama tašką iš vienos padėties į kitą, apskaičiuojamas taip:

$$A = \int_a^b F(x)dx .$$

Pavyzdys.

Suspaudžiant spyruoklę 0,05 m, atliekamas 30 J darbas. Apskaičiuosime, kokį darbą reikia atlikti, norint suspausti spyruoklę 0,08 m.

Sprendimas.

Pagal Huko dėsnį žinoma, kad jėga $F = kx$, vadinasi, $A = \int_a^b kxdx$.

$$A = \int_0^{0,05} kxdx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,05} = 0,00125 \cdot k ,$$

Kadangi $A = 30$, tai

$0,00125 \cdot k = 30$,

$k = 24000$,

$$A = \int_0^{0,08} kxdx = \int_0^{0,08} 24000 \cdot xdx = 24000 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,08} = 76,8 \text{ (J)}.$$

Ats.: 76,8 J.

6. Taikymai ekonomikoje.

Pavyzdys.

Įsteigta įmonė „Gamta“, kuri verčiasi antrinių žaliavų supirkimu ir perdirbimu. Nustatysime antrinių žaliavų likutį po 20 dienų, jei superkamo ir perdirbamo antrinių žaliavų kiekio (tonomis) priklausomybės nuo laiko išreiškiamos funkcijomis:

$$f(t) = 0,006t^2 - 0,1t + 15 ,\ g(t) = 0,02t + 10 .$$

Sprendimas.

$$Q = \int_a^b (f(t) - g(t))dt = \int_0^{20} (0,006t^2 - 0,12t + 5)dt = (0,002t^3 - 0,06t^2 + 5t)\Big|_0^{20} = 92 .$$

Ats.: likutis po 20 dienų bus 92 tonos.

Uždaviniai

Apskaičiuokite neapibrėžtinius integralus:

1. $\int\left(6x^2+x+8\right)dx$
2. $\int\left(2x^2+1\right)xdx$
3. $\int\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$
4. $\int\frac{x+1}{x}dx$
5. $\int\frac{x}{x+4}dx$
6. $\int 5\cos xdx$
7. $\int\frac{4dx}{\sin^2 x}$
8. $\int\frac{dx}{x^2+9}$
9. $\int(4x^3-7\sin x)dx$
10. $\int\left(9e^x+\frac{1}{3\cos^2 x}\right)dx$
11. $\int\sin 2xdx$
12. $\int(7x+2)^4 dx$
13. $\int e^{2-5x}dx$
14. $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$
15. $\int\frac{xdx}{3x^2+6}$
16. $\int(x+1)\sqrt{x^2+2x}dx$
17. $\int x\sin xdx$
18. $\int x^5\ln xdx$
19. $\int\frac{\ln x}{x^2}dx$
20. $\int\operatorname{arctg} xdx$
21. $\int e^x\cos xdx$

Apskaičiuokite apibrėžtinius integralus:

22. $\int_{-1}^{2}\left(x^2+2x+1\right)dx$
23. $\int_{2}^{4}\frac{2+x}{x^2}dx$
24. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin 4xdx$
25. $\int_{0}^{1}e^{3x}dx$
26. $\int_{2}^{6}\sqrt{x-2}dx$
27. $\int_{0}^{1}\frac{x^2dx}{4+3x^3}$
28. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin xdx$
29. $\int_{0}^{1}xe^{2x}dx$
30. $\int_{1}^{e}(x-1)\ln xdx$

Apskaičiuokite figūros, apribotos kreivėmis, plotą:

31. $y=x^2,\;\; y=0,\;\; x=1,\;\; x=3;$

32. $y=x-x^2,\;\; y=0;$

33. $y = 6x - x^2 - 7, \quad y = x - 3;$

34. $y = x^2, \quad y = -x + 2;$

35. $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$

Apskaičiuokite tūrį sukinio, kuris gaunamas duotų kreivių apribotą figūrą sukant apie Ox ašį:

36. $y^2 = 2(x + 4), \quad x = 0;$

37. $y^2 = 2x, \quad y = 0, \quad x = 3, \quad x = 0.$

38. Apskaičiuokite kreivės $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ ilgį, esantį tarp taškų, kuriuose ji kerta Ox ašį.

39. Taškas juda greičiu $v(t) = 12t - 3t^2.$ Raskite jo nueitą kelią nuo judėjimo pradžios iki pabaigos.

40. 80 N jėga spyruoklė ištempiama 2 cm. Pradinis spyruoklės ilgis lygus 15 cm. Kokį darbą reikia atlikti ištempiant spyruoklę iki 20 cm?

41. Tarkime, kad Lietuvos lito vertė eurais išreiškiama laiko funkcija $f(t) = 0{,}15 + 0{,}02t.$ Apskaičiuokite Lietuvos lito vidutinę vertę eurais nuo mėnesio 1 iki 15 dienos.

10. DIFERENCIALINĖS LYGTYS

10.1. Diferencialinės lygties sąvoka

Sprendžiant įvairius taikomojo pobūdžio uždavinius, dažnai iš lygties, siejančios nepriklausomąjį kintamąjį x, kintamąjį y bei išvestinę y', reikia rasti pačią funkciją $y = y(x)$.

1. Apibrėžimas.

Lygtis, kuri sieja nepriklausomąjį kintamąjį x, ieškomą funkciją y ir jos išvestines arba diferencialus, vadinama ***diferencialine lygtimi***:

$F(x, y, y') = 0$ – pirmosios eilės diferencialinė lygtis;

$F(x, y, y', y'') = 0$ – antrosios eilės diferencialinė lygtis;

…

$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ – n-tosios eilės diferencialinė lygtis.

2. Apibrėžimas.

Diferencialinės lygties eile vadinama aukščiausios eilės išvestinės, esančios toje lygtyje, eilė. Pavyzdžiui, $y^{(6)} + y^{(4)} + x = 0$ yra šeštosios eilės diferencialinė lygtis.

3. Apibrėžimas.

Diferencialinės lygties sprendiniu (arba integralu) vadinama tokia funkcija, kurią įrašę į lygtį gauname tapatybę.

Diferencialinės lygties sprendimo procesas vadinamas diferencialinės lygties integravimu, nes jos sprendiniai gaunami skaičiuojant tam tikrus neapibrėžtinius integralus.

Diferencialinės lygtys taikomos įvairiose mokslo ir praktikos srityse. Dažnai jomis išreiškiami įvairūs fizikos, biologijos, demografijos, ekonomikos procesai.

4. Apibrėžimas.

Pirmosios eilės diferencialinės lygties $y' = f(x, y)$ ***bendruoju sprendiniu*** vadinama funkcija, priklausanti nuo laisvosios konstantos *C*.

5. Apibrėžimas.

Atskiruoju diferencialinės lygties $y' = f(x, y)$ sprendiniu vadinamas sprendinys, kuris gaunamas iš bendrojo sprendinio, parinkus konkrečią laisvosios konstantos *C* reikšmę C_0.

6. Apibrėžimas.

Uždavinys, reikalaujantis rasti diferencialinės lygties atskirąjį sprendinį, tenkinantį pradines sąlygas $y\Big|_{x=x_0} = y_0$, vadinamas tos lygties ***Koši uždaviniu***.

Pavyzdys.

Išspręsime diferencialinės lygties $y' = 3x^2 - 2x$ Koši uždavinį esant pradinei sąlygai $y(1) = 0$.

Sprendimas.

$$y = \int \left(3x^2 - 2x\right)dx = \int 3x^2 dx - \int 2x dx = 3\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + C = x^3 - x^2 + C .$$

Gauname bendrąjį sprendinį

$$y = x^3 - x^2 + C ,$$

čia C – laisvoji konstanta, kurią apskaičiuosime pasinaudoję pradine sąlyga.

Kadangi $y(1) = 0$, tai

$$0 = 1^3 - 1^2 + C ,$$

$$C = 0 .$$

Taigi atskirasis sprendinys yra $y = x^3 - x^2$.

Ats.: $y = x^3 - x^2$.

10.2. Diferencialinių lygčių integravimas

Integravimo metodas pasirenkamas priklausomai nuo lygties $y' = f(x, y)$ dešiniosios pusės $f(x, y)$.

1. **Metodas.** Kintamųjų atskyrimas.

Lygtis

$$y' = g(x) \cdot h(y)$$

vadinama ***diferencialine lygtimi su atskiriamaisiais kintamaisiais***.

Šios diferencialinės lygties kintamieji atskiriami padauginus abi jos puses iš daugiklio

$$\frac{dx}{h(y)}, \quad h(y) \neq 0 .$$

Gauname lygtį

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx .$$

Pavyzdžiai.

Išspręsime diferencialines lygtis:

1. $y' = xy^2$

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 \Big/ \cdot \frac{dx}{y^2}$$

$$\frac{dy}{y^2} = xdx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int xdx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$$

$$y = -\frac{2}{x^2 + C}$$

2. $y' = \dfrac{y-1}{x+1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+1} \bigg/ \cdot \frac{dx}{y-1}, \quad y-1 \neq 0$$

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x+1}$$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y-1| = \ln|x+1| + C$$

$$\ln|y-1| = \ln|x+1| + \ln C_1$$

$$\ln|y-1| = \ln\left(C_1 \cdot (x+1)\right)$$

$$y - 1 = C_1 \cdot (x+1)$$

$$y = C_1 \cdot (x+1) + 1$$

---

2. Metodas. Homogeninės diferencialinės lygties integravimas.

Lygtis

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

kurios $P(x,y)$ ir $Q(x,y)$ yra to paties matavimo homogeninės funkcijos $\left(f(tx,ty) = t^m f(x,y), \quad t \in R\right)$, vadinama ***pirmosios eilės homogenine diferencialine lygtimi***.

Tokios diferencialinės lygtys sprendžiamos panaudojant keitinį:

$$y = u \cdot x, \quad dy = udx + xdu.$$

Pavyzdys.

Išspręsime diferencialinę lygtį $x^2 dy - y(y+x)dx = 0$.

Sprendimas.

Naudojame keitinį: $y = u \cdot x, \quad dy = udx + xdu$.

$$x^2\left(udx + xdu\right) - u \cdot x(u \cdot x + x)dx = 0 \big/ : x^2, \quad x \neq 0$$

$$udx + xdu - u^2 dx - udx = 0,$$

$$xdu - u^2 dx = 0.$$

Atskiriame kintamuosius:

$$xdu = u^2 dx \bigg/ \cdot \frac{1}{x \cdot u^2}$$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}.$$

Integruojame:

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x},$$

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + C.$$

Tuomet grįžtame prie pradinių kintamųjų, t. y. vietoj u įrašome $\frac{y}{x}$:

$$-\frac{x}{y} = \ln|x| + C,$$

$$e^{-\frac{x}{y}} = e^{\ln|x|+C},$$

$$e^{-\frac{x}{y}} = x \cdot C_1.$$

---

3. Metodas. Antrosios eilės tiesinės homogeninės diferencialinės lygties integravimas.

Lygtis

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

vadinama ***antrosios eilės homogenine diferencialine lygtimi***.

Antrosios eilės tiesinės homogeninės diferencialinės lygtys su pastoviais koeficientais sprendžiamos kaip kvadratinės lygtys. Sudarome charakteringąją lygtį

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0,$$

čia $\lambda = y', \quad \lambda^2 = y''$.

Jeigu išsprendę kvadratinę lygtį, gauname, kad:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, kai $D > 0$, tai sprendinys yra pavidalo $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$;

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, kai $D = 0$, tai sprendinys yra pavidalo $y = C_1 e^{\lambda x} + xC_2 e^{\lambda x}$;

3) $\lambda = \alpha \pm i\beta$, kai $D < 0$, tai sprendinys yra pavidalo $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$.

Pavyzdys.

Išspręsime diferencialinę lygtį $y'' + 4y' + 3y = 0$.

Sprendimas.

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0;$$

$$D = 16 - 12 = 4,$$

$$\lambda_1 = \frac{-4+2}{2} = -1, \qquad \lambda_2 = \frac{-4-2}{2} = -3.$$

Ats.: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$.

Uždaviniai

Išspręskite diferencialines lygtis:

1. $\frac{dy}{dx} = 2x$
2. $\frac{dy}{dx} = 6x^5 + x$
3. $\frac{dy}{dx} = x^6 + 3x^2 + x + 1$
4. $\frac{dy}{dx} = \sin 5x$
5. $y' = 4x^3 + 1$
6. $y' = 5x^4 - 2x + 1$
7. $y' - \frac{2}{x} = 0$
8. $y' = \sqrt[3]{x^2}$
9. $y' = \frac{1 - x^2}{x^4}$
10. $y' = \frac{2x}{x^2 + 1}$
11. $y' = xe^{-x^2}$
12. $y \cdot y' = x$
13. $y'x - x^2 + 1 = 0$
14. $yy' + x = 1$
15. $y' - \frac{2}{x} y = 0$
16. $y' = 3\sqrt[3]{y^2}$
17. $y' = xy^2$
18. $y' - 2xy = 0$
19. $y' - 3x^2 y = 0$
20. $xy' + 2y = 0$
21. $x^2 dy + (y - 1)dx = 0$
22. $\sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy = 0$

Išspręskite antrosios eilės diferencialines lygtis su pastoviais koeficientais:

23. $y'' - 3y' + 2y = 0$
24. $y'' + 2y' - 3y = 0$
25. $y'' - 3y' - 4y = 0$
26. $y'' - 2y' + y = 0$
27. $4y'' + 4y' + y = 0$
28. $y'' + 6y' + 9y = 0$
29. $y'' + 9y' + 10y = 0$
30. $y'' - y = 0$
31. $4y'' - y = 0$
32. $y'' - 4y' = 0$
33. $9y'' - y' = 0$
34. $y'' + y = 0$
35. $y'' + 4y = 0$
36. $4y'' + y = 0$
37. $y'' - 4y' + 5y = 0$
38. $y'' + y' + y = 0$

Raskite antrosios eilės diferencialinių lygčių bendrąjį sprendinį:

39. $y'' = x$
40. $y'' = \sin x$
41. $y'' = e^{2x}$

42. $y'' = \dfrac{1}{x}$

43. Nustatykite diferencialinės lygties $y^{IV} - 10y'' + y' = 0$ eilę.

44. Išspręskite lygtį $y^{(4)} - y = 0$.

Raskite homogeninių diferencialinių lygčių bendrąjį sprendinį:

45. $(2x - y)dx + xdy = 0$, $y(-2) = 6$.

46. $(3x - y)dx + xdy = 0$, $y(1) = 1$.

47. $(x + 2y)dx - xdy = 0$, $y(1) = 0$.

Išspręskite diferencialinių lygčių Koši uždavinį:

48. $ydy = xdx$, $y(-2) = 4$.

49. $2yy' = 1 - 3x^2$, $y(1) = 3$.

50. $xdy = ydx$, $y(3) = 6$.

51. $\dfrac{dy}{dx} = 2(y - 3)$, $y(0) = 4$.

52. $y^2 y' = e^x$, $y(0) = 3$.

53. $x^2 y' - 2xy = 3y$, $y(-1) = e^3$.

54. $y'' + 8y' + 16y = 0$, $y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.

55. $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$.

56. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = -1, \quad y'(0) = 3$.

57. $y'' - 9y = 0$, $y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$.

58. $y'' - 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1, \quad y'(0) = 3$.

59. $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$.

60. $x \cos \dfrac{y}{x} y' + x - y \cos \dfrac{y}{x} = 0$, $y(1) = 0$.

11. KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI

11.1. Kompleksinio skaičiaus sąvoka

Labiausiai nesuvokiama pasaulyje yra tai, kad tas pasaulis yra suvokiamas.

A. Einšteinas

1. Apibrėžimas.

Menamuoju vienetu vadinamas toks skaičius i, kurio kvadratas lygus –1:

$$i^2 = -1 . \tag{1}$$

Pavyzdys.

$i^6 + i^{17} + i^{1616} + i^{7171} = i^{2\cdot 3} + i^{2\cdot 8+1} + i^{2\cdot 808} + i^{2\cdot 3585+1} = (-1)^3 + (-1)^8 \cdot i + (-1)^{808} + (-1)^{3585} \cdot i =$
$= -1 + i + 1 - i = 0.$

Galima apibendrinti, kad

$$i^{2k} = (-1)^k ,$$
$$i^{2k+1} = (-1)^k \cdot i, \quad k \in Z.$$

2. Apibrėžimas.

Skaičiai, turintys pavidalą $z = a + ib$, $a, b \in R$ vadinami ***kompleksiniais***.

Skaičius a vadinamas ***realiąja*** kompleksinio skaičiaus dalimi ir žymimas $a = \operatorname{Re} z$.

Skaičius b vadinamas ***menamąja*** dalimi ir žymimas $b = \operatorname{Im} z$.

3. Apibrėžimas.

Kompleksiniai skaičiai $z_1 = a + ib$ ir $z_2 = -a - ib$ vadinami ***priešingaisiais***.

4. Apibrėžimas.

Kompleksinis skaičius $\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$, $a, b \in R$ vadinamas ***jungtiniu*** skaičiui $z = a + ib$.

5. Apibrėžimas.

Kompleksiniai skaičiai vadinami ***lygiais***, kai jų realiosios ir menamosios dalys sutampa.

Pavyzdys.

Iš dviejų kompleksinių skaičių lygumo rasime x ir y, kai $(1 + i)x + (1 - i)y = 3 - i$.

Sprendimas.

$x + ix + y - iy = 3 - i$;

$(x + y) + (x - y)i = 3 - i$.

Sulyginame realiąsias ir menamąsias dalis:

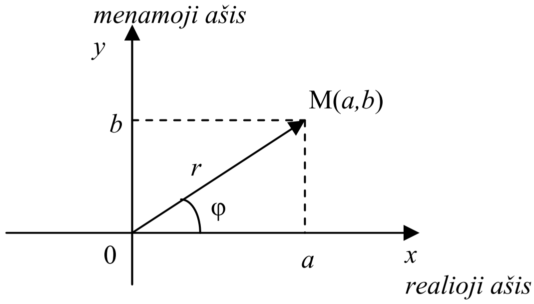
$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = -1. \end{cases}$$

Išsprendę sistemą, gauname, kad $x = 1,\ \ y = 2.$

Ats.: $x = 1,\ \ y = 2.$

11.2. Geometrinė interpretacija

Kompleksinis skaičius geometrine prasme yra taškas Dekarto koordinačių sistemoje.



1. **Apibrėžimas.**

   Kompleksinį skaičių $z = x + iy$ atitinkantis taškas $M(x, y)$ vadinamas to kompleksinio skaičiaus ***afiksu***.

2. **Apibrėžimas.**

   Kompleksinio skaičiaus ***modulis*** yra lygus

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}\ . \tag{2}$$

Pavyzdys.

Apskaičiuosime kompleksinio skaičiaus $z = -\sqrt{3} + i$ modulį.

Sprendimas.

$$|z| = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2\ .$$

Ats.: 2.

---

3. **Apibrėžimas.**

   Kampas φ tarp realiosios ašies Ox ir vektoriaus $\overrightarrow{OM}$ vadinamas kompleksinio skaičiaus ***pagrindiniu argumentu*** ir žymimas $\arg z$.

Tą patį kompleksinį skaičių z atitinka be galo daug argumento reikšmių, kurios viena nuo kitos skiriasi periodu $2\pi k,\ \ k \in Z$:

$$\mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in Z, \tag{3}$$

$\mathrm{Arg}\, z$ – kompleksinio skaičiaus argumentas,

$\varphi = \arg z$ – pagrindinė argumento reikšmė.

Pagrindinę kompleksinio skaičiaus argumento reikšmę galima apskaičiuoti pagal formulę:

$$\arg z = \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & \text{kai } a > 0 \quad (\text{I ir IV ketv.}) \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} + \pi, & \text{kai } a < 0, b \geq 0 \quad (\text{II ketv.}) \\ \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} - \pi, & \text{kai } a < 0, b < 0 \quad (\text{III ketv.}) \end{cases} \tag{4}$$

Arktangentas yra nelyginė funkcija: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x)$.

Trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė

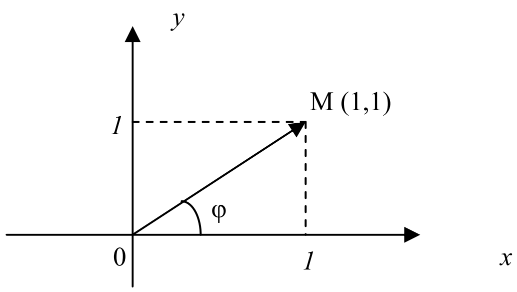
Laipsniai	0º	30º	45º	60º	90º
Radianai	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\varphi$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\operatorname{ctg}\varphi$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Pavyzdys.

Rasime kompleksinio skaičiaus $z = 1 + i$ visas argumento reikšmes.

<u>Sprendimas.</u>

Kadangi $a = 1$ ir $b = 1$, tai kompleksinį skaičių z atitinkantis vektorius yra pirmame ketvirtyje.



Tuomet pagrindinė argumento reikšmė lygi

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4},$$

o visos argumento reikšmės $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z.$

Ats.: $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in Z.$

11.3. Veiksmai su kompleksiniais skaičiais

Kompleksinį skaičių galima išreikšti įvairiomis formomis:

$$z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{algebrine}}}{a+ib} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{trigonometrine}}}{r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rodykline}}}{r\cdot e^{i\varphi}} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vektorine}}}{(a,b)} \tag{5}$$

čia $a = \operatorname{Re} z$ – realioji skaičiaus dalis,

$b = \operatorname{Im} z$ – menamoji skaičiaus dalis,

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ – kompleksinio skaičiaus modulis,

$\varphi = \arg z$ – pagrindinė argumento reikšmė.

- Jeigu turime du kompleksinius skaičius $z_1 = a_1 + ib_1$ ir $z_2 = a_2 + ib_2$, užrašytus ***algebrine forma***, tai aritmetiniai veiksmai su jais atliekami tokiu būdu:

1) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\cdot i;$
2) $z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\cdot i;$
3) $z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\cdot i;$
4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\cdot i;$
5) $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$

Pavyzdžiai.

Jei $z_1 = 1 - 5i$ ir $z_2 = -2 - i$, tai:

1. $z_1 + z_2 = (1 - 5i) + (-2 - i) = 1 - 5i - 2 - i = -1 - 6i$;
2. $z_1 - z_2 = (1 - 5i) - (-2 - i) = 1 - 5i + 2 + i = 3 - 4i$;
3. $z_1 \cdot z_2 = (1 - 5i)\cdot(-2 - i) = -2 - i + 10i + 5i^2 = -2 - i + 10i - 5 = -7 + 9i$;
4. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{1 - 5i}{-2 - i} = \dfrac{(1 - 5i)\cdot(-2 + i)}{(-2 - i)\cdot(-2 + i)} = \dfrac{-2 + i + 10i - 5i^2}{(-2)^2 - i^2} = \dfrac{3 + 11i}{5} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{11}{5}i$;
5. $z_1 \cdot \bar{z}_1 = (1 - 5i)(1 + 5i) = 1^2 + 5^2 = 1 + 25 = 26$;
6. $z_2 \cdot \bar{z}_2 = (-2 - i)(-2 + i) = (-2)^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$.

- Veiksmai su kompleksiniais skaičiais, užrašytais ***trigonometrine forma***.

Jei $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ ir $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, tai:

1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$;

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$;

3) $z^n = r^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right)$ – ***Muavro formulė***;

4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Pavyzdžiai.

1. Jei $z_1 = 6\left(\cos 65^\circ + i\sin 65^\circ\right)$ ir $z_2 = 3\left(\cos 35^\circ + i\sin 35^\circ\right)$, tai:

a) $z_1 \cdot z_2 = 6\cdot 3\left(\cos\left(65^\circ + 35^\circ\right) + i\sin\left(65^\circ + 35^\circ\right)\right) = 18\cdot\left(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ\right) = 18\cdot i$;

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{3}\left(\cos\left(65^\circ - 35^\circ\right) + i\sin\left(65^\circ - 35^\circ\right)\right) = 2\left(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ\right) =$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i.$$

2. Duotas kompleksinis skaičius $z = 1 - \sqrt{3}i$, apskaičiuosime z^{12}.

Sprendimas.

Pirmiausia užrašysime skaičių $z = 1 - \sqrt{3}i$ trigonometrine forma $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Kadangi realioji ir menamoji kompleksinio skaičiaus dalys yra

$$a = 1,\ b = -\sqrt{3},$$

tai kompleksinis skaičius yra ketvirtame ketvirtyje. Jo modulis ir pagrindinė argumento reikšmė:

$$r = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Taigi trigonometrinė kompleksinio skaičiaus forma yra

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Tuomet, pasinaudoję Muavro formule, keliame laipsniu:

$$z^{12} = 2^{12}\left(\cos\left(-\frac{12\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{12\pi}{3}\right)\right) = 2^{12}\left(\cos 4\pi - i\sin 4\pi\right) = 4096(1 - i\cdot 0) = 4\,096.$$

Ats.: 4 096.

3. Apskaičiuosime $\sqrt{-1}$.

Sprendimas.

Turime kompleksinį skaičių $z = -1$. Jo realioji ir menamoji dalys yra:

$$a = -1,\ b = 0.$$

Tuomet apskaičiuojame kompleksinio skaičiaus z modulį ir argumento pagrindinę reikšmę:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi = 0 + \pi = \pi,$$

Taigi trigonometrinė kompleksinio skaičiaus forma yra

$$z = \cos\pi + i\cdot\sin\pi.$$

Pasinaudoję ketvirta skaičiavimo formule, turime:

$$\sqrt{z} = \sqrt{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{2}\right), \quad k = 0, 1;$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i,$$

$$z_1 = \cos\frac{\pi+2\pi}{2} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 + i\cdot(-1) = -i.$$

Ats.: $\pm i$.

Oilerio formulė išreiškia trigonometrinių ir rodyklinių funkcijų ryšį:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}. \tag{5}$$

- Veiksmai su kompleksiniais skaičiais, užrašytais ***rodykline forma***.

  Jei $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ ir $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, tai:

  1) $z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;

  2) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\cdot e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;

  3) $z^n = r^n\cdot e^{in\varphi}$;

  4) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Pavyzdys.

Kompleksinį skaičių $z = -1 + i$ užrašysime rodykline forma ir apskaičiuosime z^3 ir $\sqrt[4]{z}$.

Sprendimas.

Kompleksinio skaičiaus z realioji ir menamoji dalys yra

$$a = -1,\ b = 1.$$

Tuomet apskaičiuojame kompleksinio skaičiaus z modulį ir argumento pagrindinę reikšmę:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}.$$

Taigi rodyklinė kompleksinio skaičiaus forma yra

$$z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}.$$

Pasinaudoję trečia ir ketvirta skaičiavimo formulėmis, turime:

$$z^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 e^{3\cdot\frac{3\pi}{4}i} = \sqrt{8}e^{\frac{9\pi}{4}i};$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{4}i} = \sqrt[8]{2} \cdot e^{\frac{3\pi+8\pi k}{16}i}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Uždaviniai

1. Apskaičiuokite:

   a) $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + i^7 + i^8$;

   b) $i^{16} + i^{17} + i^{28} + i^{39} + i^{50}$;

   c) $\dfrac{1}{i^5} + \dfrac{1}{i^7}$;

   d) $\left(\dfrac{i^5 + 2}{i^{10} - 1}\right)^2$.

2. Raskite x ir y, kai:

   a) $-2 + 5ix - 3iy = 9i + 2x - 4y$;

   b) $5x + 2y + (x + y)i = 4 + 5i$.

3. Parašykite kompleksinių skaičių afiksus ir nubrėžkite juos atitinkančius vektorius:

   a) $z = 4$;

   b) $z = -2i$;

   c) $z = \sqrt{3} - i$.

4. Raskite kompleksinio skaičiaus modulį ir argumento pagrindinę reikšmę:

   a) $z = i$;

   b) $z = 2 - 2i$.

5. Raskite visas argumento reikšmes:

   a) $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$;

   b) $z = 2$;

   c) $z = \sqrt{3}i$.

6. Duoti kompleksiniai skaičiai $z_1 = -1 + 6i$ ir $z_2 = 2 + 5i$. Apskaičiuokite:

   a) $z_1 + z_2$;

   b) $z_1 \cdot 2z_2$;

   c) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

7. Apskaičiuokite:

   a) $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i}$;

   b) $\dfrac{(3 + 3i)(-2 + i)}{1 - i}$.

8. Apskaičiuokite:

a) $\frac{2}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$;

b) $10\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right):2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

c) $3\left(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ\right):3\left(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ\right)$.

9. Kompleksinį skaičių $z=-\sqrt{3}+i$ užrašykite trigonometrine ir rodykline formomis.

10. Kompleksinį skaičių $z=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ užrašykite trigonometrine ir algebrine formomis.

11. Kompleksinį skaičių $z=6+6i$ užrašykite trigonometrine forma ir apskaičiuokite z^4.

12. Ištraukite kubinę šaknį iš šių kompleksinių skaičių:

a) $z=1$;

b) $z=-i$.

13. Kompleksinį skaičių $z=4e^{\frac{\pi}{3}i}$ užrašykite trigonometrine forma ir apskaičiuokite $\sqrt{z}$.

14. Išspręskite lygtis:

a) $1+z^2=0$;

b) $z^2-4z+5=0$;

c) $z^3+1=0$.

15. Remdamiesi Muavro formule, apskaičiuokite:

a) $z=(4+4i)^8$;

b) $z=(2+2i)^{10}$.

16. Apskaičiuokite $|z_2-z_1|$, kai $z_1=\sqrt{2}-4i$, $z_2=3\sqrt{2}-5i$.

17. Sukasi lėktuvo propeleris. Staiga variklis užgęsta. Propeleris sustoja tokioje vietoje pagal šį kompleksinį uždavinį: $z=-7-7i$. Išspręskite jį trigonometrine forma ir pavaizduokite, kurioje vietoje sustojo propeleris.

12. ANALIZINĖ GEOMETRIJA

Analizinė geometrija yra matematikos šaka, kuri, naudodama koordinačių metodą, geometrinių objektų savybes nagrinėja algebros metodais.

12.1. Vektoriaus sąvoka

Kai kurie kintamieji dydžiai (jėga, greitis ir kt.) apibūdinami ne tik skaičiumi, bet ir kryptimi.

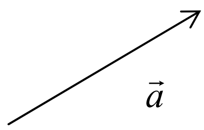
1. Apibrėžimas.

a) ***Vektorius*** – tai visų ekvipolenčių kryptinių atkarpų aibė.

Ekvipolenčios atkarpos – tai vienodos krypties ir vienodo ilgio atkarpos. Vektorių apibrėžia vienas bet kuris jo atstovas, t. y. kryptinė atkarpa.

b) ***Vektorius*** – tai vektorinės erdvės elementas.

Vektoriai žymimi raidėmis su rodykle $\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ arba paryškintu šriftu ***a***.



2. Apibrėžimas.

n-mačiu vektoriumi vadinamas sutvarkytas realiųjų skaičių rinkinys $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

n-matis vektorius yra $1 \times n$ arba $n \times 1$ matmenų:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ arba } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

3. Apibrėžimas.

Vektoriaus modulis (ilgis) žymimas $|\vec{a}|$ ir apskaičiuojamas pagal atstumo tarp dviejų taškų formulę (iš vektoriaus galo koordinačių atimamos vektoriaus pradžios koordinatės):

a) $|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$ – tiesės vektorius;

b) $|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ – plokštumos vektorius;

c) $|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ – erdvės vektorius;

d) jei $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, tai $|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}$.

Pavyzdžiai.

1. Vektoriaus $\left|\overrightarrow{MN}\right|$ ilgis, kai žinomos taškų koordinatės $M(2;\,0;\,-1)$ ir $N(-1;\,0;\,-5)$, lygus

$$\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{(-1-2)^2+(0-0)^2+(-5+1)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

2. Vektoriaus $\vec{a} = (0;-3;\,4)$ ilgis lygus

$$|\vec{a}| = \sqrt{0^2+(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = 5\,.$$

4. Apibrėžimas.

Du vektoriai vadinami ***lygiais*** $\vec{a} = \vec{b}$, jeigu jie yra tos pačios krypties ir jų moduliai vienodi (t. y. jų kryptinės atkarpos ekvipolenčios).

Tiesiniai veiksmai (daugyba iš skaičiaus, sudėtis bei atimtis) su n-mačiais vektoriais apibrėžiami taip pat kaip ir su matricomis.

Pavyzdys.

Apskaičiuosime vektorių $\vec{c} = 2\cdot\vec{a}-\vec{b}$, kai $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ ir $\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Sprendimas.

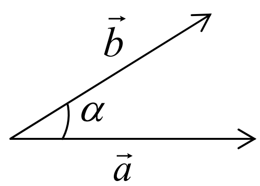
$$\vec{c} = 2\cdot\vec{a}-\vec{b} = 2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}.$$

12.2. Vektorių sandaugos

Vektorius sudauginti galima trim būdais, t. y. skaliarinė, vektorinė ir mišrioji sandaugos.

1. Dviejų vektorių ***skaliarinė sandauga*** yra skaičius

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha\,. \qquad (1)$$



Jei duoti n-mačiai vektoriai

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \text{ ir } \vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

tai skaliarinė jų sandauga

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + \ldots + a_n\cdot b_n\,. \qquad (2)$$

Pavyzdžiai.

Apskaičiuosime vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai

1. $\vec{a} = (-2; 1; 2)$, $\vec{b} = (0; -1; -1)$.

Sprendimas.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) = 0 - 1 - 2 = -3 .$$

Ats.: –3.

2. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ ir kampas tarp jų $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Sprendimas.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 4 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 6 .$$

Ats.: 6.

Skaliarinės sandaugos savybės:

1) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{a}^2$;

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

3) $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$, λ – bet koks skaičius;

4) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Vektorių statmenumo sąlyga.

Jei du vektoriai vienas kitam statmeni, tai jų skaliarinė sandauga lygi nuliui, t. y.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 . \tag{3}$$

2. Dviejų vektorių ***vektorinė sandauga*** yra vektorius, kurio modulis

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\alpha . \tag{4}$$

Kai vektoriai išreikšti koordinatėmis, vektorinė sandauga apskaičiuojama kaip determinantas

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \tag{5}$$

čia $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$ yra vienetiniai vektoriai, dar vadinami ***ortais***.

Pavyzdys.

Apskaičiuosime vektorių $\vec{a}=(1;-1;2)$ ir $\vec{b}=(0;2;-3)$ vektorinę sandaugą.

Sprendimas.

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(-1)\cdot(-3)+\vec{j}\cdot 2\cdot 0+\vec{k}\cdot 1\cdot 2-\vec{j}\cdot 1\cdot(-3)-\vec{i}\cdot 2\cdot 2-\vec{k}\cdot(-1)\cdot 0=$$

$$=3\vec{i}+2\vec{k}+3\vec{j}-4\vec{i}=-\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}=(-1;3;2).$$

Ats.: $(-1;3;2)$.

Vektorinės sandaugos savybės:

1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$;

2) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$;

3) $(\lambda\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$, λ – bet koks skaičius;

4) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$.

1. Apibrėžimas.

Vektoriai vadinami ***kolineariaisiais***, jei jų kryptinės atkarpos yra vienoje tiesėje arba lygiagrečiose tiesėse.

Vektorių kolinearumo sąlyga.

Vektoriai yra kolinearūs, kai yra tiesiškai priklausomi (jų koordinatės proporcingos) arba kai jų vektorinė sandauga yra lygi nuliniam vektoriui. T. y., jei egzistuoja toks realusis skaičius $t\neq 0$, su kuriuo būtų teisinga lygybė $\vec{b}=t\cdot\vec{a}$, arba jei

$$\vec{a}\parallel\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}. \quad (6)$$

Taikymas plotui apskaičiuoti:

$$S_{lygiagretainis}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|, \quad (7)$$

čia vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ yra lygiagretainio kraštinės.

$$S_{trikampis}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|. \quad (8)$$

Vektorinė sandauga fizikoje taikoma apskaičiuojant jėgos momentą.

3. ***Mišrioji trijų vektorių sandauga*** yra skaičius, kuris apskaičiuojamas

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\,. \tag{9}$$

Mišrioji trijų vektorių sandauga yra determinantas

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Mišriosios sandaugos savybė.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}=-\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b}\,.$$

2. Apibrėžimas.

Komplanarūs vektoriai – tai vektoriai, lygiagretūs vienai plokštumai, t. y. vektorių kryptinės atkarpos yra vienoje plokštumoje.

Vektorių komplanarumo sąlyga.

Vektoriai yra komplanarūs, kai jų mišrioji sandauga lygi nuliui

$$\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)=0\,. \tag{11}$$

Taikymas tūriui apskaičiuoti:

$$V_{gretasienis}=\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|, \tag{12}$$

$$V_{piramidė}=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\right|, \tag{13}$$

čia vektoriai $\vec{a}$, $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ išeina iš vienos viršūnės.

12.3. Tiesės plokštumoje

Bendroji tiesės lygtis	$Ax+By+C=0$, $\vec{n}=\left(A;B\right)$ – tiesės normalės vektorius
Kryptinė tiesės lygtis	$y=kx+b$, $k=\operatorname{tg}\alpha$ – krypties koeficientas, α – kampas tarp tiesės ir Ox ašies
Ašinė tiesės lygtis	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, a – taško x, kuriame tiesė kerta Ox ašį, koordinatė b – taško y, kuriame tiesė kerta Oy ašį, koordinatė
Tiesės, einančios per tašką $M\left(x_1,y_1\right)$, kai žinomas krypties koeficientas, lygtis	$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k$

Tiesės, einančios per du taškus $M_1(x_1, y_1)$ ir $M_2(x_2, y_2)$, lygtis	$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$
Atstumas nuo taško $M(x_1, y_1)$ iki tiesės $Ax+By+C=0$	$d=\dfrac{\lvert Ax_1+By_1+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$
Kampas tarp tiesių	$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$
Dviejų tiesių lygiagretumo sąlyga	$k_1=k_2$ arba $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}$
Dviejų tiesių statmenumo sąlyga	$k_1\cdot k_2=-1$ arba $A_1\cdot A_2=B_1\cdot B_2$

Pavyzdys.

Tiesė eina per tašką $M(-3;-1)$ ir su Ox ašimi sudaro kampą $\alpha=120^\circ$. Parašysime tos tiesės lygtį.

Sprendimas.

$k=\mathrm{tg}120^\circ=-\sqrt{3}$,

$y=-\sqrt{3}x+b$.

Kadangi $x=-3$, $y=-1$, tai

$-1=-\sqrt{3}\cdot(-3)+b$,

$-1=3\sqrt{3}+b$,

$b=-1-3\sqrt{3}$.

Taigi gauname, kad $y=-\sqrt{3}x-1-3\sqrt{3}$ arba $\sqrt{3}x+y+1+3\sqrt{3}=0$.

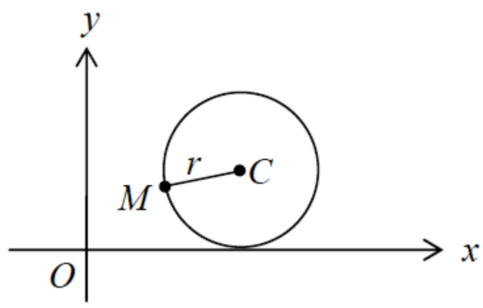
Ats.: $\sqrt{3}x+y+1+3\sqrt{3}=0$.

12.4. Antros eilės kreivės

Antros eilės kreivėmis vadinamos kreivės, kurių lygtys yra antrojo laipsnio kintamųjų x ir y atžvilgiu. Bendras antrojo laipsnio lygties pavidalas

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

1. **Apskritimas** yra tokia plokštumos kreivė, kurios kiekvienas taškas yra vienodai nutolęs nuo duoto pastovaus taško $C(x_0, y_0)$.



Bendroji apskritimo lygtis:

$$Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0. \tag{1}$$

Kanoninė apskritimo lygtis:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \tag{2}$$

čia x_0, y_0 – apskritimo centro koordinatės,

r – apskritimo spindulys.

Pavyzdys.

Užrašysime apskritimo lygtį, kurio centras yra $C(-1; 2)$, o taškas $M(2; 6)$ yra apskritime.

<u>Sprendimas.</u>

Į lygtį (3) įrašome apskritimo centro koordinates:

$(x+1)^2 + (y-2)^2 = r^2$.

Kadangi taškas M yra apskritime, tai

$(2+1)^2 + (6-2)^2 = r^2$,

$9 + 16 = r^2$,

$r = 5$.

Taigi apskritimo lygtis $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

Ats.: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$.

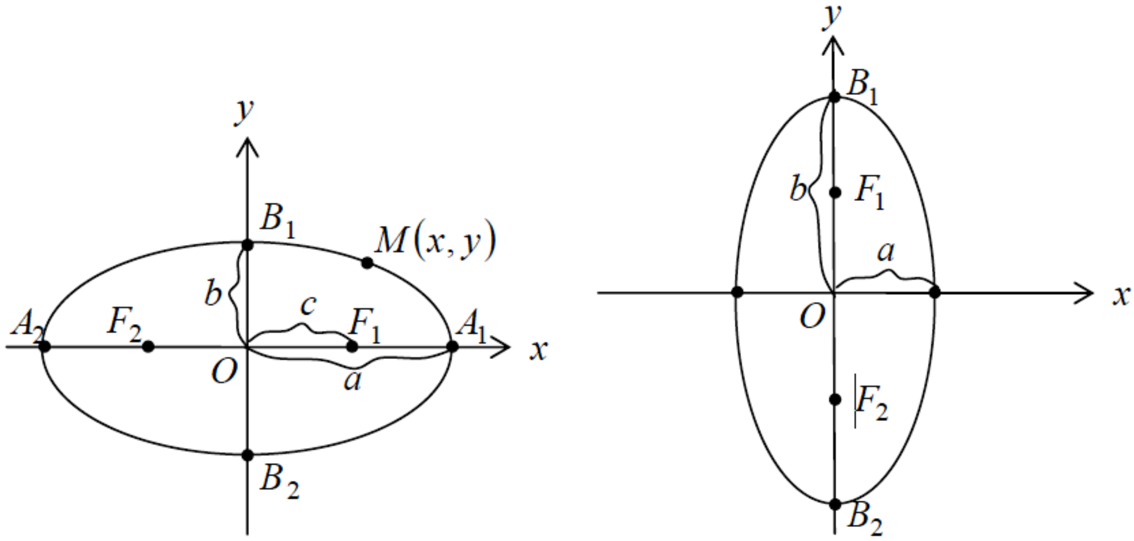
---

2. Elipsė – plokštumos kreivė, kurios kiekvieno taško atstumų iki dviejų duotųjų taškų, vadinamų židiniais, suma yra pastovus dydis.

Kanoninė elipsės lygtis:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

čia a ir b yra elipsės pusašiai.



Židiniai žymimi F_1 ir F_2, o atstumas tarp jų lygus $2c$. Židinių koordinatės apskaičiuojamos taip:

$$c^2 = a^2 - b^2, \text{ kai } a > b,$$
$$\text{arba} \tag{4}$$
$$c^2 = b^2 - a^2, \text{ kai } a < b.$$

Ekscentricitetas – tai dydis, lygus atstumo tarp elipsės centro ir jos židinio santykiui su didžiuoju elipsės pusašiu:

$$e = \frac{c}{a}, \text{ kai } a > b,$$
$$\text{arba} \tag{5}$$
$$e = \frac{c}{b}, \text{ kai } a < b.$$

Pavyzdys.

Apskaičiuosime elipsės $9x^2 + 25y^2 = 225$ pusašius, židinius ir ekscentricitetą.

Sprendimas.

$9x^2 + 25y^2 = 225 \ \ /:225$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$

$a^2 = 25, \ b^2 = 9,$

$a = 5, \ b = 3$ – pusašiai.

$c^2 = a^2 - b^2, \ c > 0,$

$c^2 = 25 - 9,$

$c^2 = 16,$

$c = 4, \ F(\pm 4; 0)$ – židiniai.

$e=\dfrac{c}{a}$, $e=\dfrac{4}{5}$ – ekscentricitetas.

Ats.: $a=5$, $b=3$, $F(\pm 4;0)$, $e=\dfrac{4}{5}$.

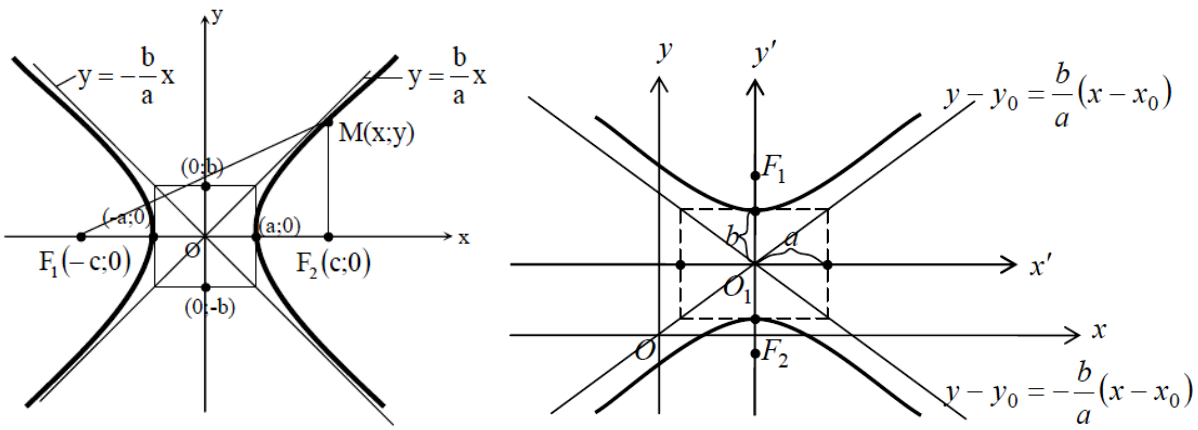
3. Hiperbolė – plokštumos kreivė, kurios kiekvieno taško atstumų iki dviejų duotųjų taškų, vadinamų židiniais, skirtumas yra pastovus dydis.

Kanoninė hiperbolės lygtis:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{6}$$

čia a – realusis pusašis,

b – menamasis pusašis.



Hiperbolė turi dvi asimptotes, kurių lygtys

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \tag{7}$$

Židinių F_1 ir F_2 koordinatės

$$c^2=a^2+b^2. \tag{8}$$

Ekscentricitetas apskaičiuojamas pagal (5) formulę.

Pavyzdys.

Parašysime hiperbolės lygtį, jeigu židiniai yra Ox ašyje, realioji ašis lygi 16 ir $e=\dfrac{5}{4}$.

Sprendimas.

Kadangi realioji ašis $2a=16$, tai $a=8$ ir

$e=\dfrac{c}{a}$,

$\dfrac{5}{4}=\dfrac{c}{8}$,

$$c = 10.$$

Iš (8) formulės turime

$$10^2 = 8^2 + b^2,$$

$$b^2 = 36.$$

Taigi hiperbolės lygtis $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

Ats.: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

---

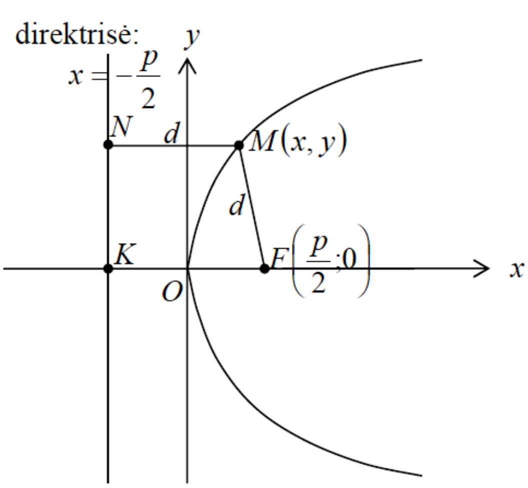
4. Parabolė – plokštumos kreivė, kurios kiekvienas taškas yra vienodai nutolęs nuo duotojo taško (židinio) ir duotosios tiesės (direktrisės).

Židinio F atstumas nuo direkrisės žymimas p (parabolės parametras), $p > 0$.

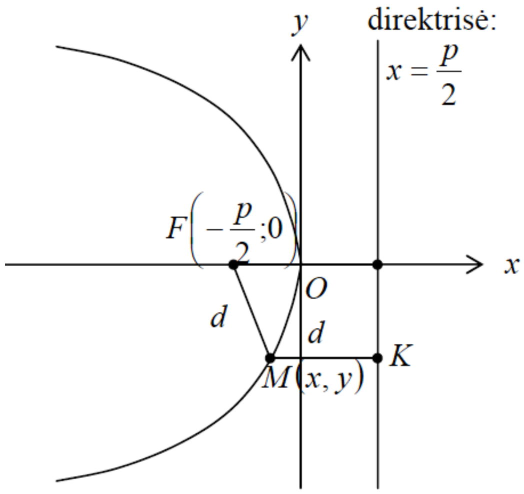
Kanoninė parabolės lygtis:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad y^2 = 2px; \\ &\text{b)}\quad y^2 = -2px; \\ &\text{c)}\quad x^2 = 2py; \\ &\text{d)}\quad x^2 = -2py. \end{aligned} \tag{9}$$

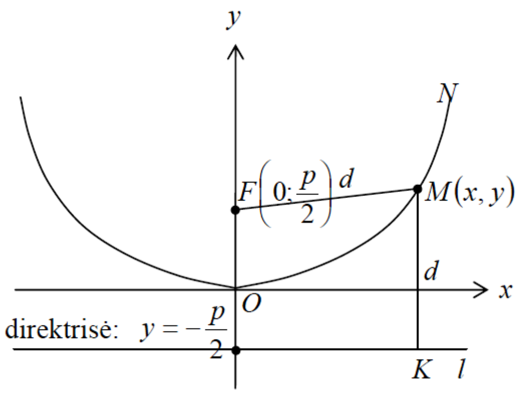
(a)



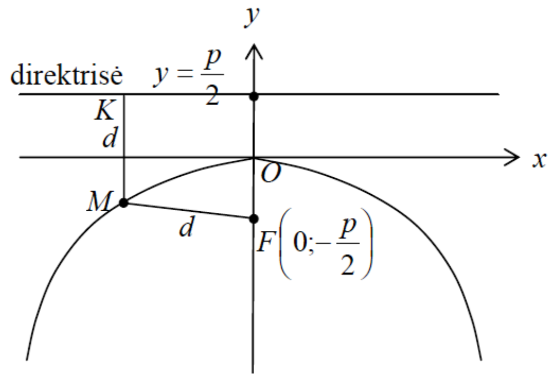
(b)



(c)



(d)



Pavyzdys.

Apskaičiuosime parabolės $y^2 = 10x$ parametrą, užrašysime židinio koordinates ir direktrisės lygtį.

<u>Sprendimas.</u>

$y^2 = 2px$,

$2p = 10$,

$p = 5$ – parabolės parametras;

$F\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ – židinys;

$x = -\frac{5}{2}$ – direktrisė.

Ats.: $p = 5,\ F\left(\frac{5}{2}; 0\right),\ x = -\frac{5}{2}$.

Uždaviniai

1. Duoti vektoriai $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ ir $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. Apskaičiuokite:

   a) $\vec{a} + \vec{b}$;

   b) $3\vec{a} - 2\vec{b}$;

   c) $|\vec{a}|$.

2. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a} = 3\vec{b} + 2\vec{c} - 4\vec{d}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai $\vec{b} = (2; -3; 1; 0)$, $\vec{c} = (0; -2; 1; 4)$ ir $\vec{d} = (1; -1; 0; 3)$.

3. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a} = \vec{c} - \vec{d}$ ir $\vec{b} = \vec{d} - 2\vec{c}$ skaliarinę sandaugą, kai

   a) $\vec{c} = (3; -2; 1; 0)$ ir $\vec{d} = (0; 1; 2; -1)$;

   b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ir $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Apskaičiuokite vektorių $\vec{a} = (4; -5; 0)$ ir $\vec{b} = (0; 4; -3)$ vektorinės sandaugos ilgį.

5. Žinoma, kad $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$. Apskaičiuokite vektorinės sandaugos $\vec{a} \times \vec{b}$ ilgį.

6. Apskaičiuokite reiškinį $(2\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b}$, kai $\vec{a} = (0; -1; 3)$ ir $\vec{b} = (1; 1; -2)$.

7. Su kokia m reikšme vektoriai $\vec{a} = (m; 2; 4)$ ir $\vec{b} = (5; 3; m)$ yra statmeni?

8. Su kokia α reikšme vektoriai $\vec{a} = (1; -3; \alpha)$, $\vec{b} = (2; 0; -\alpha)$ ir $\vec{c} = (-1; 2; 1)$ yra komplanarūs?

9. Įrodykite, kad taškai $K(1; 0; 7)$, $L = (-1; -1; 2)$, $M = (2; -2; 2)$ ir $N = (0; 1; 0)$ yra vienoje plokštumoje.

10. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą, jei jo kraštinės yra vektoriai:

    a) $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}$ ir $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$;

    b) $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ ir $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$;

    c) $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ir $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$.

11. Apskaičiuokite trikampio plotą, jei jo viršūnės yra taškuose $A(1; 1; 0)$, $B(1; 0; 1)$ ir $C(0; 1; 1)$.

12. Duotos lygiagretainio $ABCD$ viršūnės $A(-5; 4; 3)$, $B(-3; 5; 5)$ ir $C(5; 5; 9)$. Raskite šio lygiagretainio plotą ir aukštinės, statmenos kraštinei AB, ilgį.

13. Įrodykite, kad trikampis yra lygiašonis, jei jo viršūnės yra taškai $A(-5; 1; 2)$, $B(1; 2; 5)$ ir $C(2; 8; 2)$.

14. Įrodykite, kad trikampis yra taisyklingas, jei jo viršūnės yra taškai $A(0;1;1)$, $B(1;0;1)$ ir $C(1;1;0)$.
15. Nustatykite trikampio rūšį, jei jo viršūnės yra $A(2;\,4;\,5)$, $B(-3;\,2;\,2)$ ir $C(-1;\,0;\,3)$.
16. Apskaičiuokite atstumą nuo taško $M(1;-2)$ iki tiesės $2x+y-7=0$.
17. Įrodykite, kad tiesės $2x+5y+4=0$ ir $6x+15y-8=0$ yra lygiagrečios.
18. Apskaičiuokite kampą tarp tiesių $x+7y-5=0$ ir $3x-4y+2=0$.
19. Užrašykite apskritimo kanoninę lygtį, kai:
    a) centras $C(-3;\,2)$ ir spindulys $r=3$;
    b) centras $C(0;\,0)$ ir spindulys $r=\sqrt{2}$.
20. Užrašykite apskritimo lygtį, kurio centras yra Ox ašyje, o taškai $A(-1;\,0)$ ir $B(2;-3)$ yra apskritime.
21. Apskaičiuokite elipsės $x^2+2y^2=2$ didžiąją ir mažąją ašis.
22. Parašykite elipsės, kurios židiniai yra taškuose $(\pm 7;\,0)$, o $e=0{,}28$, lygtį.
23. Apskaičiuokite elipsės $\frac{(x-3)^2}{4}+\frac{(y-5)^2}{25}=1$ centro, viršūnių ir židinių koordinates.
24. Nubraižykite hiperbolę $\frac{x^2}{9}-y^2=1$.
25. Apskaičiuokite hiperbolės $4x^2-121y^2=484$ pusašius, židinių koordinates ir parašykite asimptočių lygtis.
26. Apskaičiuokite parabolės parametrą, židinio koordinates ir užrašykite direktrisės lygtį, kai:
    a) $y^2=-3x$;
    b) $x^2=y$.
27. Užrašykite parabolės lygtį, kai parabolės viršūnė yra koordinačių pradžios taškas, o direktrisė yra tiesė $x=-2$.
28. Taisyklingai nubraižykite elipsę turėdami du smeigtukus, siūlo ir pieštuką.

13. KOMPIUTERINĖS MATEMATIKOS SISTEMOS

13.1. Matematiniai programų paketai

Matematiniams modeliams kurti ir tyrinėti plačiausiai taikomi šie programų paketai:

1) *MATLAB*,
2) *Maple*,
3) *Mathematica*,
4) *MathCad* ir kt.

Lentelėje trumpai pateikiami šių kompiuterinių priemonių privalumai bei trūkumai.

Programų paketas	**Privalumai**	**Trūkumai**
MATLAB (angl. *matrix laboratory*)	• didelis skaičiavimo greitis • gerai atlieka grafines operacijas • pritaikytas darbui su matricomis • turi didelį priemonių komplektą • universalus (tinka mokymuisi ir moksliniam darbui)	• labai brangus • reikalauja galingo kompiuterio
Maple	• orientuotas atlikti simbolinius skaičiavimus • turi išvystytas grafines priemones ir vidinę programavimo kalbą • skirtas sudėtingiems projektams įgyvendinti	• per daug akademiškas (griežtas, tikslus) • pasižymi gana sudėtinga interaktyvaus dialogo forma • labiau tinka aukšto lygio specialistams
Mathematica	• patogu derinti su kitais programų paketais • tinka dirbti aukštųjų mokyklų studentams	• keliami tam tikri kompiuterio galingumo reikalavimai • gana žemas kompiuterinės programos apsaugos lygis
MathCad	• universalus (tinka mokymuisi ir moksliniam darbui) • nereikalauja ypatingų kompiuterio išteklių (spartos bei atminties talpos) • turi paprastą vartotojo sąsają (formulės ar duomenys įvedami naudojant klaviatūrą arba specialias priemonių juostas)	• simbolinių skaičiavimų ir programavimo galimybės yra ribotos, t. y. sudėtinga kurti savo programas ir funkcijas

Iš minėtų programinių paketų panagrinėsime *MathCad*.

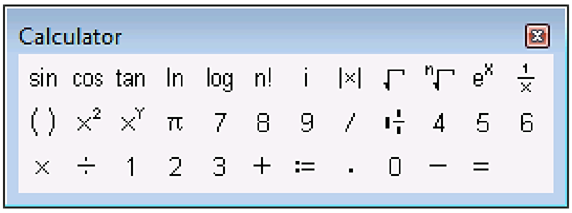
13.2. Darbas su *MathCad* programa

MathCad – yra programinės įrangos paketas, specializuotas spręsti matematinius, techninius ir ekonominius uždavinius.

Įvesti formules ar duomenis galima šiomis *MathCad* komandomis: MATH, MATRIX, CALCULUS, CALCULATOR, GRAPH, SYMBOLIC ir kt.

Duomenų įvedimas.

Dirbant su programiniu paketu *MathCad*, duomenis galima įvesti tokiais būdais:



1) komanda := iš CALCULATOR kintamajam priskiriant tam tikrą reikšmę, pvz., $x := 1$;
2) iš failo

   Insert→Data→File Input.

Skaičiavimų tikslumas.

Programinis paketas *MathCad* atlieka skaičiavimus 0,001 tikslumu (jei nenurodyta kitaip). Skaičiavimo tikslumą galima reguliuoti pasirinkus operatorių TOL.

Pavyzdžiui, įvedus

$TOL := 0.0001$,

visi skaičiavimai, užrašyti po šios išraiškos, skaičiuojami nurodytu tikslumu.

Du kartus spragtelėjus ant ekrane užrašyto skaičiaus, galima pasirinkti skaičiaus formatą.

MathCad programos operatorius ORIGIN yra pradinio matricų ir vektorių indekso reikšmė (numatytoji yra 0). ORIGIN operatoriui priskyrus vienetą $ORIGIN := 1$, indeksų reikšmės prasideda nuo 1.

Funkcijų įvedimas.

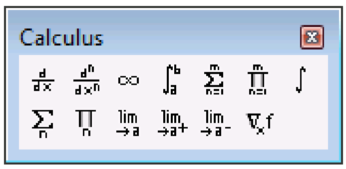
Funkcijos *MathCad* darbo lange gali būti apibrėžiamos tokiais būdais:

1) įvedant klaviatūra, pvz., $y := (\sin(2 \cdot x))^2$;
2) pasirenkant komandą CALCULATOR;
3) naudojant *Insert→Function*.

Simboliniai skaičiavimai.

Simboliniai skaičiavimai atliekami pasinaudojus komanda SYMBOLIC.

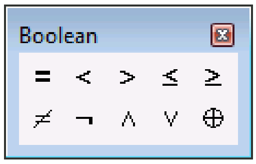
Pavyzdžiui, norint apskaičiuoti funkcijos $y = \ln x$ išvestinę, reikia įvesti $\frac{d}{dx}\ln(x)$, pasirinkti $\rightarrow$ ir gausime rezultatą:



$$\frac{d}{dx}\ln(x) \to \frac{1}{x}.$$

Lygtys, nelygybės bei jų sistemos.

Lygties ir nelygybės ženklai pasirenkami iš komandos BOOLEAN.



Lygtys, nelygybės bei jų sistemos gali būti sprendžiamos panaudojant komandos SYMBOLIC funkciją *solve*.

Pavyzdys.

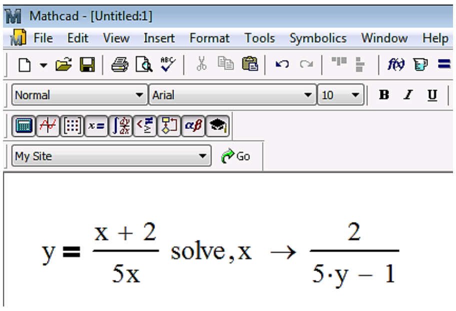
Nelygybė $2x-3 \geq 0$ sprendžiama taip:

$$2 \cdot x - 3 \geq 0 \text{ solve} \to \frac{3}{2} \leq x$$

Išspręsti lygtį norimo kintamojo atžvilgiu galima po funkcijos *solve* padėjus kablelį ir nurodžius kintamojo vardą.

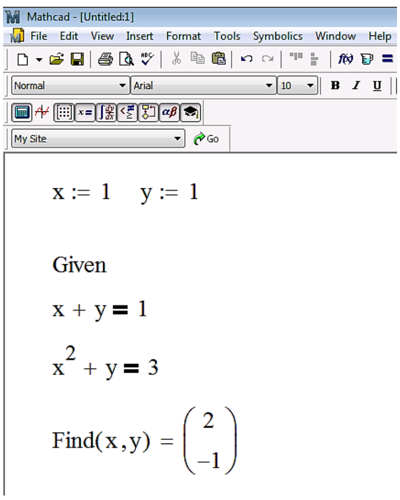
Pavyzdys.

Išspręsime lygtį $y = \dfrac{x+2}{5x}$ kintamojo x atžvilgiu:



Lygčių sistemas dar galima spręsti tokiu būdu:

1) klaviatūra surenkamas raktažodis *Given*;
2) po juo užrašomos lygtys ir nelygybės;
3) surenkamas žodis *Find*, skliausteliuose išvardijami nežinomieji.



Pavyzdys.

Paveiksle matome, kaip reikia suvesti duomenis *MathCad* darbo lange norint išspręsti sistemą

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + y = 3. \end{cases}$$

Tiesines lygčių sistemas galima spręsti per funkciją *lsolve*.

Pavyzdys.

Išspręsime lygčių sistemą $\begin{cases} 3x + 2y + z + 5, \\ x + y - z = 0, \\ 4x - y + 5z = 3. \end{cases}$

<u>Sprendimas.</u>

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$X := \text{lsolve}(A, B)$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sprendžiant optimalaus planavimo uždavinius, tenka ieškoti funkcijos didžiausių arba mažiausių reikšmių. Tokiu atveju *MathCad* darbo lange naudojamos funkcijos *Maximize* (*Minimize*):

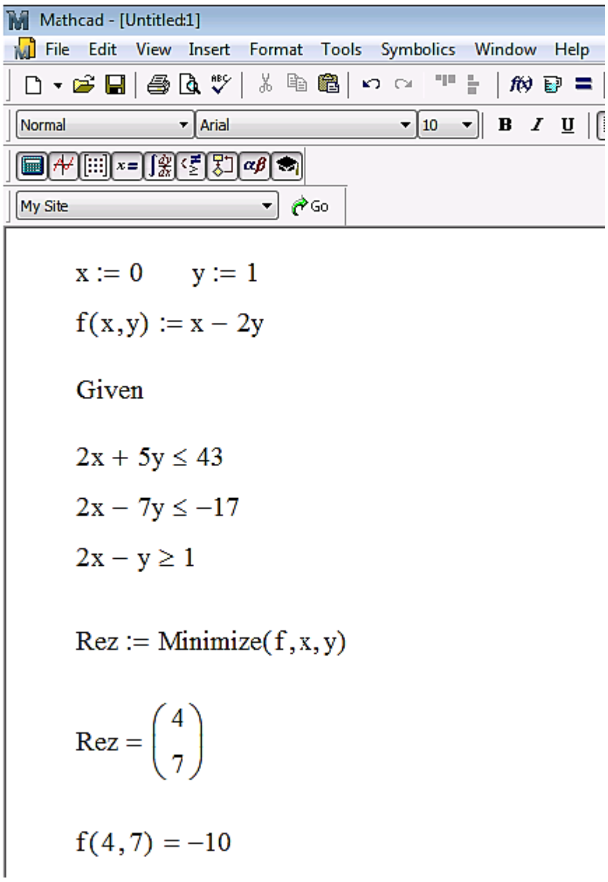
1) aprašoma tikslo funkcija;
2) funkcijos argumentams priskiriamos pradinės reikšmės;
3) *Given* bloke aprašomi apribojimai;
4) pasirinktam vardui priskiriama *Maximize* (*Minimize*) funkcija iš *Insert*→*Function*;
5) rezultatas gaunamas užrašant vardą ir lygybės simbolį „=“.

Pavyzdys.

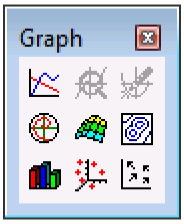
Paveiksle pateiktas algoritmas, kaip rasti funkcijos $f(x, y) = x - 2y$ minimumą, kai

$$\begin{cases} 2x + 5y \le 43, \\ 2x - 7y \le -17, \\ 2x - y \ge 1. \end{cases}$$

Ats.: $f_{\min}(4, 7) = -10.$



Grafikai.



Grafikai *MathCad* programoje braižomi su komanda GRAPH.

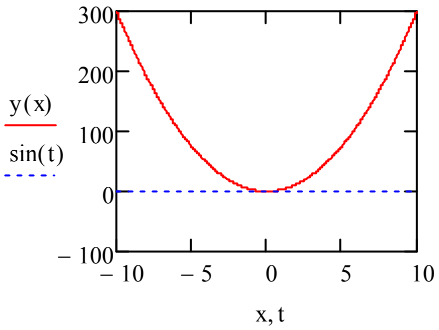
Grafiko apačioje rašomi kintamieji (argumentai), kairėje, esančios žymės vietoje, užrašomos funkcijos. Jeigu viename brėžinyje norima pavaizduoti kelis grafikus, tai ir funkcijas, ir kintamuosius reikia atskirti kableliais.

Pavyzdys.

Nubraižysime funkcijų $y = 3x^2$ ir $x = \sin t$ grafikus.

<u>Sprendimas.</u>

$$y(x) := 3x^2$$



Uždaviniai

Matematiniu programos paketu *MathCad* išspręskite uždavinius:

1. Duotos matricos $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ir $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Apskaičiuokite:

   a) $B - 4A$;

   b) $A \cdot B^T$;

   c) A^{-1};

   d) $|B|$.

2. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 19, \\ 4x + 2y + z = 0, \\ 3x - y + 2z = 9. \end{cases}$$

   Atsakymą pateikite trupmeniniu pavidalu.

3. Raskite funkcijų išvestines:

   a) $y = \ln\cos\left(2x^5\right)$;

   b) $y = tg(2x) + \sec x$.

4. Suintegruokite funkcijas:

   a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx$;

   b) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3 + 16}} dx$.

   Atsakymą pateikite šimtųjų tikslumu.

5. Apskaičiuokite ribą $\lim_{x \to \infty}\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$.

6. Išspręskite lygtį $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ x^2 & x & 0 & 0 \\ x & 5 & x & 0 \\ 25 & x & x^2 & 5 \end{vmatrix} = 100.$

7. Raskite funkcijos $y = \frac{7 - 2x}{4 - x}$ atvirkštinę funkciją.

8. Apskaičiuokite:

a) funkcijos $f(x, y) = 20x + 30y$ maksimumą, kai $\begin{cases} x + 2y \leq 10, \\ x + \ \ y \leq \ \ 8, \\ \qquad y \leq \ \ 4; \end{cases}$

b) funkcijos $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_3$ maksimumą, kai $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 10, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 18, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$

9. Nubraižykite funkcijų $y = x^2 - 5$ ir $s(z) = \cos^2 z - 2\sin z$ grafikus.

ATSAKYMAI

1. FINANSINIAI SKAIČIAVIMAI.

1.	25 kg	6.	333 km, 60 %, 133 km	11.	1241,82 Lt
2.	16 %	7.	5000 Lt	12.	4935,40 Lt
3.	10 %	8.	3979,58 Lt		
4.	60 g	9.	222,44 Lt		
5.	8500 Lt	10.	10016,08 Lt		

2. MATRICŲ TEORIJA.

1. a) $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & 9 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 12 & 11 & -3 \\ -2 & -1 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} -4 & -9 & 9 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & -6 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -8 & 2 & -12 \\ -1 & 3 & -7 \\ 4 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 19 \\ 7 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

3. a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ b) Ø

   c) $\begin{pmatrix} 6 & 18 & 12 \\ 4 & 6 & 3 \\ 22 & 30 & 14 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 24 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix}$

4. a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 13 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 4 & 13 & 4 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

5. 21

6. a) $x = 6$, $y = 2$

   b) $x_1 = 4$, $x_2 = 5$

7. a) -5 c) 0 e) Ø g) 4

   b) 7 d) -79 f) 8

8. –14

9. a) $\frac{1}{46}\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$

c) Ø

d) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

3. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS.

1. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$
2. $(1; 1; 1)$
3. $(1; 7; -2)$
4. $(1; 0; 1)$
5. $(-1; 0; -1)$
6. Ø
7. $(16t; 4t; t), \ t \in R$
8. $(13-13t; -7+8t; t), \ t \in R$
9. a) $(2; -1; 1)$

   b) Ø

   c) $(3; 2; 1; 0)$
10. $(1; 2; -1)$

4. EKONOMINIŲ OPTIMIZAVIMO UŽDAVINIŲ MATEMATINIS MODELIAVIMAS.

3. Ø
4. $F_{\max}(0; 6) = 30$
5. $F_{\max}(0; 4) = 4$
6. $F_{\min}(4; 7) = -10$
7. $F_{\min}(0; 2) = -4$
8. $F_{\max}(3; 4; 0; 0; 14) = 18$
9. A – 20 vnt., B – 10 vnt., pajamos – 1500 Lt
10. kelnių – 30 vnt., švarkų – 60 vnt., pelnas – 2400 Lt
11. išorės darbams – 3 t, vidaus darbams – 1,5 t, pelnas – 21000 Lt
12. lovų – 66 vnt., kušečių – 6 vnt., pelnas – 28200 Lt
13. langų – 14 vnt., durų – 33 vnt., pelnas – 1080 Lt
14. „Kapitonas“ –17 vnt., „Partneris“ – 9 vnt., pelnas – 1660 Lt
15. paprastų – 60 m^2, spalvotų – 20 m^2, pelnas – 1800 Lt
16. „Fiat“ – 6, „Volvo“ – 4, arba „Fiat“ – 9, išlaidos – 180000 Lt
17. a) statybinių – 90 vnt., grindinių – 30 vnt., pajamos – 30000 Lt, pelnas – 6000 Lt;

    b) statybinių – 60 vnt., grindinių – 50 vnt., pajamos –27500 Lt, pelnas – 6400 Lt.

18. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \le 50 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 100 \\ 5x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 4x_4 \le 100 \\ x_1 \ge 3 \quad x_2 \ge 3 \\ x_i \le 30 \quad x_i \ge 0 \quad i = \overline{1,4} \end{cases}$$

$$F(x) = 10x_1 + 15x_2 + 20x_3 + 12x_4 \to \max F(x)$$

19. $$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 30 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40 \\ x_{11} + x_{21} = 10 \\ x_{12} + x_{22} = 25 \\ x_{13} + x_{23} = 35 \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$F(x) = 40x_{11} + 50x_{12} + 36x_{13} + 35x_{21} + 45x_{22} + 52x_{23} \to \min F(x)$$

20. $$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 50 \\ x_{21} + x_{22} = 40 \\ x_{31} + x_{32} = 60 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 80 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70 \\ x_{ij} \ge 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2 \end{cases}$$

$$F(x) = 0{,}09x_{11} + 0{,}12x_{12} + 0{,}15x_{21} + 0{,}08x_{22} + 0{,}12x_{31} + 0{,}3x_{32} \to \min F(x)$$

5. AIBIŲ TEORIJA.

1. a) $A = \{-6; 1\}$ b) $B = \{-1; 1\}$ c) $C = \varnothing$
2. a) $A \cup B = \{-2; -1; 0; 3; 5\}$, $A \cap B = \{-1; 3\}$, $A \setminus B = \{0\}$, $B \setminus A = \{-2; 5\}$

   b) $A \cup B = \{-1; 1; 2; 3; 4; 7; 8\}$, $A \cap B = \{2; 4\}$, $A \setminus B = \{1; 7\}$, $B \setminus A = \{-1; 3; 8\}$

   c) $A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$, $A \cap B = \{-2; 2\}$, $A \setminus B = \{3\}$, $B \setminus A = \{-1; 0; 1\}$

   d) $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$

   e) $A \cup B = \{-3; 1; 2\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{-3\}$, $B \setminus A = \{1\}$

   f) $A \cup B = (-2; 1]$, $A \cap B = (-1; 0)$, $A \setminus B = (-2; -1]$, $B \setminus A = [0; 1]$

   g) $A \cup B = [-4; 4]$, $A \cap B = (0; 3]$, $A \setminus B = [-4; 0] \cup (3; 4]$, $B \setminus A = \varnothing$

   h) $A \cup B = \{x : -3 < x \le 7\}$, $A \cap B = \{x : 0 \le x < 4\}$, $A \setminus B = \{x : -3 < x < 0\}$,
   $B \setminus A = \{x : 4 \le x \le 7\}$

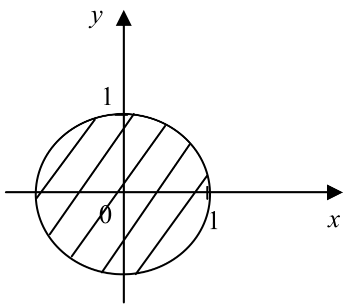
   i) $A \cup B = \{x : 0 < x < 3\}$, $A \cap B = \{x : 1 \le x < 2\}$, $A \setminus B = \{x : 2 \le x < 3\}$, $B \setminus A = \{x : 0 < x < 1\}$

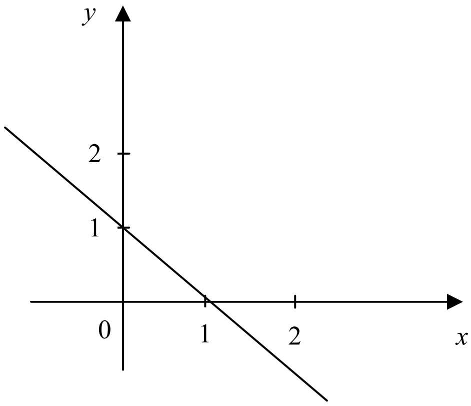
j) $A \cup B = [-1; 4)$, $A \cap B = \{1\}$, $A \setminus B = [-1; 1) \cup (1; 4)$, $B \setminus A = \varnothing$

k) $A \cup B = (-\infty; -3] \cup (-2; 1) \cup [3; +\infty)$, $A \cap B = \varnothing$, $A \setminus B = A$, $B \setminus A = B$

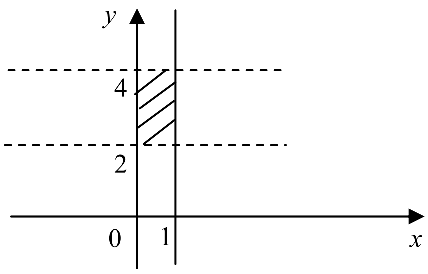
l) $A \cup B = (-\infty; +\infty)$, $A \cap B = [1; 2) \cup (3; 4]$, $A \setminus B = [2; 3]$, $B \setminus A = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$

3. a) $\{2\}$ b) $\{4; 6\}$
4. a) $\{-1; 4; 5\}$ b) $\{4\}$ c) $\{0; 1; 4; 5\}$ d) $\{(0; -1); (0; 4); (1; -1); (1; 4)\}$
5. a) A b) $\varnothing$ c) A d) $\varnothing$
6. a) ir d)
7. a) b)





8.



9. 3.

6. FUNKCIJOS.

1. $x \in (-\infty; 2) \cup (2; 5) \cup (5; +\infty)$
2. $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 3) \cup (3; +\infty)$
3. $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$
4. $x \in (-\infty; +\infty)$
5. $x \in [0; +\infty)$
6. $x \in [-3; 1) \cup (1; 3]$
7. $x \in (-\infty; -7] \cup (0; +\infty)$
8. $x \in [-2; 1) \cup [2; +\infty)$
9. $x \in (-\infty; 1)$
10. $x \in (0; 6)$
11. $x \in (-1; 2)$
12. $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$
13. $y = 2 - \frac{2x}{5}$
14. $y = \frac{4}{x+1}$

15. $y = \frac{5-x}{x+2}$

16. $y = \frac{3}{2x+4}$

17. $y = x\sqrt[5]{x}$

18. $t = s\sqrt[3]{s^2}$

19. $a = \frac{7T}{1+2T}$

20. $r = \frac{U}{I} - R$

21. ∞

22. 0

23. 10

24. $\frac{1}{2}$

25. 2

26. $2\sqrt{3}$

27. $\sqrt{2}$

28. $\frac{1}{7}$

29. $-\frac{20}{21}$

30. $-\frac{1}{2}$

31. ∞

32. 0

33. 2

34. $-\frac{1}{2}$

35. 0

36. $-\infty$

37. ∞

38. 1

39. 9

40. 1

41. 2

42. 9

43. $\frac{3}{2}$

44. $\frac{4}{3}$

45. $\frac{1}{2}$

46. $-\frac{1}{4}$

47. 0

48. e^{10}

49. $e^{\frac{1}{10}}$

50. 1

7. SKAIČIŲ EILUTĖS.

1. a) $a_n = \frac{n}{4^{n+1}}$

   b) $a_n = \frac{2n-1}{2n}$

2. $\frac{1}{20}$

3. $a_n = \lg n$, $a_{100} = 2$

4. a) $1-\frac{1}{m+1}$, 1

b) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2m+1}\right)$, $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3m+1}\right)$, $\frac{1}{3}$

d) $3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{m+3}\right)$, 1

e) $\frac{11}{6}-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}-\frac{1}{m+3}$, $\frac{11}{6}$

f) $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m+2}\right)$, $\frac{3}{4}$

5. a) diverguoja

b) konverguoja

c) konverguoja

d) diverguoja

6. a) konverguoja

b) diverguoja

c) diverguoja

d) konverguoja

e) konverguoja

f) konverguoja

7. a) diverguoja

b) konverguoja reliatyviai

8. FUNKCIJOS IŠVESTINĖ.

1. $6x^2-\sqrt{3}$
2. $5x^3$
3. $-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
4. $\frac{1}{x}+2e^x$
5. $-\frac{6}{\sin^2 x}+6^x\ln 6$
6. $\cos 2x$
7. $\log_3 x+\frac{1}{\ln 3}$
8. $\frac{10}{x\ln 10}$
9. $-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$
10. $\frac{1-\ln x}{x^2}$
11. $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$
12. $-20\cos^{19}x\cdot\sin x$
13. $\frac{3}{\sqrt[3]{(2+9x)^2}}$
14. $\frac{5\cos 5x}{2\sqrt{\sin 5x}}$
15. $\frac{\sqrt{x}}{2x(1+x)}$
16. $6x\left(1+x^2\right)^2$
17. $\left(x^4-2\right)^5\left(25x^4-2\right)$
18. $e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$
19. $e^{x\ln x}(\ln x+1)$
20. $\frac{2}{(x-1)^2\sin^2\frac{x+1}{x-1}}$
21. $-30\mathrm{tg}(15x)$
22. $\ln x+1$
23. $48-6u^3$
24. $6\ln a+11$
25. $\frac{24}{(p-2)^5}$
26. $-0{,}02$

27. a) 2

b) 0

c) –3

d) $\frac{25}{9}$

e) $\frac{1}{2}$

f) $\frac{1}{2}$

g) $\frac{2}{5}$

h) $-\frac{1}{2}$

i) 0

28. 32 m/s, 22 m/s^2

29. $\frac{1}{2}$ m/s, $\frac{1}{4}$ m/s^2

30. 3 s

31. 4 laipsniai per sekundę

32. 3 laipsniai per sekundę

33. 6,4 A/s

34. 3125 J

35. $y = 9x - 16$

36. $\frac{\pi}{4}$

37. $\frac{\pi}{4}$

38. a) $f_{\min}\left(\pm\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$, $f_{\max}(0) = 0$, mažėja $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$, didėja $\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

b) $f_{\max}(1) = 1\frac{1}{3}$, $f_{\min}(3) = 0$, mažėja $(1; 3)$, didėja $(-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$

c) $f_{\min}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \ln 2$, mažėja $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$, didėja $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

39. 9 ir 9

40. 80 ir 40

41. $14\sqrt{2}$ cm

42. a) 110

b) 441

43. a) $100 \cdot \left(10 + 18p - 3p^2\right)$

b) $50e^{-0,02p}\left(1 - 0,02p\right)$

44. a) 5

b) $\approx 0,14$

45. a) $\frac{8}{15} \approx 0,53$

b) $\approx 1,78$

9. INTEGRALAI.

1. $2x^3+\frac{x^2}{2}+8x+C$
2. $\frac{x^4+x^2}{2}+C$
3. $\frac{1}{3}x^3+2x-\frac{1}{x}+C$
4. $x+\ln|x|+C$
5. $x-4\ln|x+4|+C$
6. $5\sin x+C$
7. $-4\operatorname{ctg}x+C$
8. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$
9. $x^4+7\cos x+C$
10. $9e^x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}x+C$
11. $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$
12. $\frac{(7x+2)^5}{35}+C$
13. $-\frac{e^{2-5x}}{5}+C$
14. $2e^{\sqrt{x}}+C$
15. $\frac{1}{6}\ln(3x^2+6)+C$
16. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+2x)^3}+C$
17. $-x\cos x+\sin x+C$
18. $\frac{x^6}{6}\ln x-\frac{x^6}{36}+C$
19. $-\frac{1}{x}(\ln x+1)+C$
20. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$
21. $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C$
22. 9
23. $\frac{1}{2}+\ln 2$
24. $\frac{1}{2}$
25. $\frac{1}{3}(e^3-1)$
26. $\frac{16}{3}$
27. $\frac{1}{9}(\ln 7-\ln 4)$
28. $\frac{1}{4}$
29. $\frac{1}{4}(e^2+1)$
30. $\frac{1}{4}(e^2-3)$
31. $8\frac{2}{3}$ kv. vnt.
32. $\frac{1}{6}$ kv. vnt.
33. $\frac{9}{2}$ kv. vnt.
34. $\frac{9}{2}$ kv. vnt.
35. $\frac{1}{3}$ kv. vnt.
36. 16π kub. vnt.
37. 9π kub. vnt.
38. $\sqrt{6}+\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$
39. 32 m
40. 5 J
41. 0,31 Eur.

10. DIFERENCIALINĖS LYGTYS.

1. $y=x^2+C$
2. $y=x^6+\frac{x^2}{2}+C$
3. $y=\frac{x^7}{7}+x^3+\frac{x^2}{2}+x+C$
4. $y=-\frac{1}{5}\cos 5x+C$
5. $y=x^4+x+C$
6. $y=x^5-x^2+x+C$
7. $y=2\ln|x|+C$
8. $y=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$
9. $y=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x}+C$
10. $y=\ln(x^2+1)+C$
11. $y=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$
12. $y^2=x^2+C$

13. $y=\frac{x^2}{2}-\ln|x|+C$

14. $y^2=2x-x^2+C$

15. $y=C\cdot x^2$

16. $y=(x+C)^3$

17. $y=\frac{2}{-x^2+C}$

18. $y=C\cdot e^{x^2}$

19. $y=C\cdot e^{x^3}$

20. $y=C\cdot\frac{1}{x^2}$

21. $y=C\cdot e^{\frac{1}{x}}+1$

22. $\sqrt{y}+\sqrt{x}=C$

23. $y=C_1e^{2x}+C_2e^x$

24. $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$

25. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{4x}$

26. $y=e^x(C_1+xC_2)$

27. $y=e^{-\frac{1}{2}x}(C_1+xC_2)$

28. $y=e^{-3x}(C_1+xC_2)$

29. $y=C_1e^{\frac{-9+\sqrt{41}}{2}x}+C_2e^{\frac{-9-\sqrt{41}}{2}x}$

30. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

31. $y=C_1e^{\frac{1}{2}x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}$

32. $y=C_1e^{4x}+C_2$

33. $y=C_1e^{\frac{1}{9}x}+C_2$

34. $y=C_1\cos x+C_2\sin x$

35. $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

36. $y=C_1\cos\frac{x}{2}+C_2\sin\frac{x}{2}$

37. $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

38. $y=e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

39. $y=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2$

40. $y=-\sin x+C_1x+C_2$

41. $y=\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2$

42. $y=x(\ln x-1+C_1)+C_2$

43. Ketvirta eilė

44. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

45. $y=-2x^2+7x$

46. $y=-3x^2+4x$

47. $y=x^2-x$

48. $y^2=x^2+12$

49. $y^2=x-x^3+9$

50. $y=-2x$

51. $y=e^{2x}+3$

52. $y=3\cdot e^x$

53. $y=x^2\cdot e^{-\frac{3}{x}}$

54. $y=e^{-4x}(1+5x)$

55. $y=e^{-3x}(2+7x)$

56. $y=e^{-x}-2e^{-2x}$

57. $y=e^{3x}-e^{-3x}$

58. $y=e^x(\cos x+2\sin x)$

59. $y=e^{3x}(\cos 2x+\sin 2x)$

60. $xe^{\sin\frac{y}{x}}=1$

11. KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI.

1. a) 0
   b) 1
   c) 0
   d) $\frac{3}{4}+i$
2. a) $x=3$, $y=2$
   b) $x=2$, $y=7$
3. a) $M(4;\ 0)$
   b) $M(0;\ -2)$
   c) $M(\sqrt{3};\ -1)$
4. a) $\varphi=\frac{\pi}{2}$
   b) $\varphi=-\frac{\pi}{4}$
5. a) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$
   b) $2\pi k,\ k\in Z$
   c) $\frac{3\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$
6. a) $1+11i$
   b) $-64+14i$
   c) $\frac{28}{29}+\frac{17}{29}i$
7. a) 0
   b) $-3-6i$
8. a) –4
   b) $5i$
   c) $-i$
9. $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z=2e^{\frac{5\pi}{6}i}$
10. $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z=1+i$
11. $z=6\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z^4=-5184$
12. a) 1, $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$
    b) i, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$
13. $z=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $\sqrt{z}=\pm\left(\sqrt{3}+i\right)$
14. a) $\pm i$
    b) $2\pm i$
    c) -1, $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$
15. a) 2^{20}
    b) $2^{15}i$
16. 3

12. ANALIZINĖ GEOMETRIJA.

1. a) $4\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$
   b) $7\vec{i}-12\vec{j}+8\vec{k}$
   c) $\sqrt{17}$
2. 36
3. –34; –9
4. 25
5. $4\sqrt{3}$
6. 0
7. $-\frac{2}{3}$
8. –2
9. $\left(\overrightarrow{KL}\cdot\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KN}\right)=0$

10. a) $\sqrt{75}$ kv. vnt.

b) 49 kv. vnt.

c) $\sqrt{138}$ kv. vnt.

11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. $S = 12$ kv. vnt., $h = 4$

13. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{46}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{98}$

14. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{2}$

15. Statusis

16. ≈ 3

18. 45°

19. a) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 9$

b) $x^2 + y^2 = 2$

20. $(x-2)^2 + y^2 = 9$

21. $2\sqrt{2}$ ir 2

22. $\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} = 1$

23. $C(3;\,5)$, $F(3;\,5 \pm \sqrt{21})$, $A_1(5;\,5)$, $A_2(1;\,5)$, $B_1(3;\,10)$, $B_2(3;\,0)$

25. $a = 11$, $b = 2$, $F(\pm 5\sqrt{5};\,0)$, $y = \pm\frac{2}{11}x$.

26. a) $p = \frac{3}{2}$, $F\left(-\frac{3}{4};\,0\right)$, $x = \frac{3}{4}$

b) $p = \frac{1}{2}$, $F\left(0;\,\frac{1}{4}\right)$, $y = -\frac{1}{4}$

27. $y^2 = 8x$

13. KOMPIUTERINĖS MATEMATIKOS SISTEMOS.

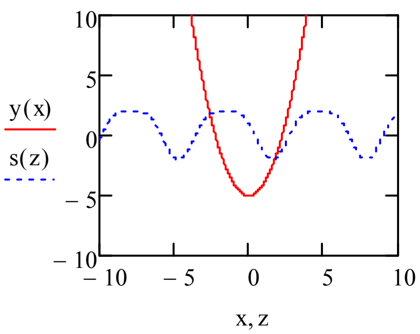
1. a) $\begin{pmatrix} 12 & -4 & -8 \\ 1 & 10 & 1 \\ 6 & -10 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 16 & -12 & -6 \\ 0 & 9 & 4 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -7 & -12 \end{pmatrix}$ d) 40

2. $\begin{pmatrix} -\frac{104}{15} \\ \frac{77}{15} \\ \frac{262}{15} \end{pmatrix}$

3. a) $-10x^4 tg(2x^5)$

b) $\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \tan^2 x + 1$

9.



4. a) 0,10

b) 0,17

5. $\frac{1}{2}$

6. ± 2

7. $\frac{4y-7}{y-2}$

8. a) $f_{\max}(6,\,2) = 180$

b) $f_{\max}(0,\,2,\,4) = 4$

LITERATŪRA

1. Apynis A., Stankus E., 2000, *Taikomoji matematika*. Vilnius: VVK leidykla.
2. Apynis A., Stankus E., 2001, *Matematika*. Vilnius: TEV.
3. Čiegis R., Būda V., 1997, *Skaičiuojamoji matematika*. Vilnius: TEV. Prieiga per internetą [žiūrėta 2014-02-04]: http://www.mif.vu.lt/~olgas/SM/SMvadovelisBC.pdf.
4. Grigalavičienė E., Zenkevičienė M., 2002, *Matematikos praktikumas*. Marijampolė: Marijampolės kolegijos leidybos centras.
5. *Kompiuterinės matematikos sistemos*. Prieiga per internetą [žiūrėta 2013-11-12]: http://www.techmat.vgtu.lt/konspektai/MPI/paskaita_1.pdf.
6. Krylovas A., Kriauzienė R., Lavcel O., Kastickaitė J., 2009, *Taikomoji matematika*. Prieiga per internetą [žiūrėta 2014-02-04]: http://www.techmat.vgtu.lt/~akrl/Medziaga/Studiju_medziaga/2010P/Taik_matem/Taikomoji_matematika_20091208.pdf.
7. Lapinskas A., 2007, *Matematikos praktikumas su MATHCAD*. Akademija: LŽŪU.
8. Raškinienė D., Vilkelienė R., 2006, *Plokštumos analizinės geometrijos pagrindai*. Akademija: LŽŪU. Prieiga per internetą [žiūrėta 2014-12-01]: www.asu.lt/file.doc?id=26131.
9. Rimkevičienė A., 2011, *Matematikos uždavinynas*. Šiauliai: Šiaulių valstybinės kolegijos leidybos centras.
10. Rimkuvienė D., 2009, *Matematikos ir statistikos uždavinynas*. Akademija: LŽŪU. Prieiga per internetą [2014-03-12]: www.asu.lt/file.doc?id=28188.
11. Sakalauskas L., 2003, *Informacinės technologijos inžinerijoje*. Prieiga per internetą [žiūrėta 2013-11-17]: http://katr.vgtu.lt/leonidas/konspi/konspektas1_files/konspektas1.htm.
12. Stankus E., 2005, *Tiesinė algebra ir geometrija*. Prieiga per internetą [žiūrėta 2014-02-04]: http://www.mif.vu.lt/katedros/mmk/stan/files/algebra_u.pdf.
13. Stasiūnienė D., Šedžiuvienė N., 2005, *Matematika*. Šiauliai: Šiaulių kolegijos leidybos centras.
14. Zaksienė G., Kravčenkienė V., 2011, *Matematika. Studijuojantiems socialinius mokslus*. Kaunas: Technologija.

Ingrida Vaičiulytė

TAIKOMOJI MATEMATIKA

Mokomoji priemonė

Recenzentai:
prof. dr. Renata Macaitienė (Šiaulių universitetas),
Audronė Rimkevičienė (Šiaulių valstybinė kolegija).

Kalbos redaktorė – Egidija Masevičienė
Meninė redaktorė – Lina Liesienė

2014-12-10. 2,07 leidyb. apsk. l.
Išleido Šiaulių valstybinė kolegija, Aušros al. 40, Šiauliai
www.svako.lt
El. p. leidyba@svako.lt